Transformações

Definição Sejam E e D subconjunto de R^n. Uma transformação T de E sobre D é uma função cujo domínio é E e cuja imagem é D.

Notação Se $E, D \subset R^2$, $T : E \to D$ é uma transformação então dados $P = (x, y) \in E$ e $Q = (u, v) \in D$ com $T(P) = Q$ podemos expressar a transformação T por meio de duas funções coordenadas escrevendo

$$T : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y), \qquad \forall (x, y) \in E \end{cases}$$

ou ainda $T(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$.

Consideremos a transformação (1) $T : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ do plano xy no plano uv. Se T é inversível as equações (1) definem x e y como funções de u e v, isto é,

(2) $T^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$

Caso em (1) u e v possuam derivadas parciais de 1ª ordem definimos o Jacobiano de T, o qual denotamos J_T ou $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, por $J_T = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$, Dessa forma, no caso de existir T^{-1}e se $J_T \neq 0$, podemos obter $x(u,v)$e $y(u,v)$ a partir de (1) observando que

Teorema da Transformação Inversa

Dada a Transformação (1) $T:\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ tal que u e $v \in C^1(\Omega)$, com $\Omega \subset R^2$ aberto e se $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ é tal que $J_T(P_0) \neq 0$ então fica determinado, de modo único, (2) $T^{-1}:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, esta definida em uma bola aberta B com centro $Q_0 = T(P_0) = (u(P_0), v(P_0)) = (u_0, v_0)$, tal que:

1) $T^{-1}(Q_0) = T^{-1}(u_0,v_0) = (\,x(u_0,v_0), y(u_0,v_0) = P_0$;

2) $(ToT)^{-1}(u,v) = I_B(u,v) = (u,v)$, $\forall (u,v) \in B$;

3) As funções $x(u,v)$ e $y(u,v)$ possuem derivadas parciais de 1ª ordem dadas por $x_u = \dfrac{v_y}{J_T}$; $y_u = \dfrac{-v_x}{J_T}$; $x_v = \dfrac{-u_y}{J_T}$; $y_v = \dfrac{u_x}{J_T}$

Observações:

i) O teorema afirma que T é inversível de uma vizinhança de P_0 sobre uma vizinhança de Q_0.

ii) O teorema vale, com adaptações óbvias, para abertos $\Omega \subset R^3$.

iii) As fórmulas (1) e (2) são chamadas "fórmulas de mudança de coordenadas"

Em nosso curso aplicaremos o Teorema da Transformação Inversa em três situações bem específicas, a saber, para obter as fórmulas de mudança de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.

Coordenadas Polares

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ de R^2 definiremos suas coordenadas polares $(r, \theta) \in R^2$ da seguinte maneira: $r = \| (x_0, y_0) \|$ é chamado de raio polar; θ= o ângulo entre o raio vetor OP_0 e o semi-eixo positivo x é chamado de ângulo polar, este é medido a partir do semi-eixo positivo x no sentido anti-horário conforme figura abaixo:

Para evitar ambigüidade tomamos $\theta \in [0, 2\pi)$. Diremos também que a origem (0,0) tem raio polar $r = 0$ e ângulo polar θ indeterminado.

Relações entre Coordenadas Polares e Cartesianas

Podemos então pensar em uma transformação $T: E \to R^2 - \{(0,0)\}$ com $E = \{(r,\theta) \in R^2 \mid r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ para a qual seja válido $T(r,\theta) = (x, y) \Leftrightarrow (r,\theta)$ forem as coordenadas polares de (x, y).

Assim é que (1) $T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$ e as expressões de $x(r,\theta)$ e $y(r,\theta)$ podem ser obtidas observando os seguintes desenhos

Em qualquer caso vale $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y = y(r,\theta) = rsen\theta$.

Uma vez que $x(r,\theta)$ e $y(r,\theta)$ têm derivadas parciais de 1ª ordem contínuas e vale $J_T =$

segue que T é inversível.

A expressão de T^{-1} é dada por:

$$T^{-1}: \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ \textbf{ se } \ y < 0 \ \textbf{ou} \\ \theta = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ se \ y \ge 0 \end{cases}$$

Definição Se C é uma curva do plano dada por $C:\rho(x,y)=0$, uma equação polar de C é a equação ρ expressa em função de r e θ; $T^{-1}(C):\rho(r\cos\theta, rsen\theta)=0$

Exemplos :

1) Dar a equação polar da curva de equação cartesiana $x^2+y^2-4x=0$. Desenhe as curvas.

2) Encontre a equação cartesiana do gráfico tendo a equação polar dada por $r^2=4\cos 2\theta$.

Interpretação Geométrica de T

Temos então que $T:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \end{cases}$. Sendo assim, as retas da forma $\theta = \text{cte}$, contidas em E, têm por imagem no plano xy, semi-retas pela origem. Já os segmentos do tipo $r=\text{cte}$, contidos em E, têm como imagem no plano xy circunferências com centro (0,0) e raio $r=\text{cte}$. Geometricamente temos

Exemplos: Dado D no plano xy, ache E no plano $r\theta$ tal que $T(E)=D$, nos seguintes casos:

a) $D: x^2+y^2\le 16, \quad x\ge 0;$

b) $D: 0 \leq y \leq x \leq 1$;

c) $D: \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \end{cases}$.

Coordenadas Cilíndricas

Dado um ponto $Q = (x, y, z) \in R^3$ definimos suas coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por: (r, θ) são as coordenadas polares da projeção P de Q no plano xy e z como a própria terceira coordenada de Q.

Relações entre as Coordenadas Cilíndricas e Cartesiandas

Uma vez que (r, θ) são as coordenadas polares da projeção $P = (x, y, 0)$ de Q temos que $x = r\cos\theta$ e $y = rsen\theta$ e, por definição, $z = z$. Podemos então pensar em $T: E \to R^3 - eixo\, z$ onde temos que o conjunto $E = \left\{(r, \theta, z) \in R^3 \mid r > 0;\ 0 \leq \theta < 2\pi;\ z \in R\right\}$ e a expessão de T é dada por (1) $T: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{cases}$, tal transformação será tal que

$$J_T = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0$$ em E. Portanto T é inversí-

vel e $T(E)$ é todo R^3 menos o eixo z.

Das equações de (1) obtemos:

$$(2)\ T^{-1}: \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & se\ y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & se\ y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}.$$

Geometricamente temos:

<u>Definição:</u> Se S é uma superfície no espaço xyz, com equação $S: F(x,y,z)=0$, uma equação de $T^{-1}(S)$ em coordenadas cilíndricas é $T^{-1}(S): F(r\cos\theta, rsen\theta, z) = 0$.

<u>Exemplos:</u> (1) Dada a superfície S, em coordenadas cartesianas, encontre as coordenadas cilíndricas de $T^{-1}(S)$. Desenhe S e $T^{-1}(S)$ nos casos:

(a) $S:\ x^2+y^2=4$

(b) $S:\ z=4;\quad x^2+y^2 \leq 4$

(c) $S:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

(d) $S:\ z=2\sqrt{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\leq 4$

(2) Dado o sólido D no espaço xyz ache um sólido E no espaço $r\theta z$ tal que $T(E)=D$; desenhe E e D nos casos:

(a) $D: \ 3 \leq z \leq \sqrt{25-x^2-y^2}$;

(b) $D: \ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$;

(c) $D: \ \frac{1}{3}(x^2+y^2) \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Coordenadas Esféricas

Dado um ponto $Q=(x,y,z)\in R^3$ definimos suas coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) por: r=distância de Q até a origem $O=(0,0,0)$; θ=ângulo entre o raio vetor OP e o semi-eixo x positivo medido a partir deste último no sentido anti-horário (P=projeção de Q no plano xy); ϕ=ângulo entre o raio vetor OQ e o semi-eixo z positivo medido a partir do semi-eixo z no sentido horário conforme figura ilustrativa abaixo:

Relações entre as Coordenadas Esféricas e Cartesianas

A partir do desenho acima podemos estabelecer as relações entre x, y, z e r, θ, ϕ. (Os casos em que o ponto Q não se encontra no primeiro octante são análogos ao que é aqui descrito). Temos:

Assim é que se $E = \{(r,\theta,\phi) \mid r > 0;\ 0 \le \theta < 2\pi;\ 0 < \phi < \pi\}$ a transformação $T : E \to R^3 - eixo\, z$, dada por

$$T : \begin{cases} x = r\cos\theta\, sen\phi \\ y = rsen\theta\, sen\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$ tem como Jacobiano

$$J_T = \begin{vmatrix} \cos\theta sen\phi & -rsen\theta\, sen\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ sen\theta\, sen\phi & r\cos\theta\, sen\phi & r\, sen\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\, sen\phi \end{vmatrix} = -r^2 sen\phi \neq 0$$

em E, logo, pelo Teorema da Transformação Inversa, T é inversível e temos que vale.

$$T^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & se\ \ y \ge 0 \\ 2\pi - \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & se\ \ y < 0 \end{cases} \\ \phi = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}.$$

Geometricamente temos:

Definição: Se S é uma superfície no espaço xyz, com equação cartesiana $S: F(x,y,z)=0$, uma equação de $T^{-1}(S)$ em coordenadas esféricas é dada por $T^{-1}(S): F(r\cos\theta\, sen\phi, rsen\theta\, sen\phi, r\cos\phi)=0$.

Exemplos: 1) Dê a equação de $T^{-1}(S)$ em coordenadas esféricas. Desenhe S e $T^{-1}(S)$ nos casos:

a) $S:\ x^2+y^2+z^2=16$;

b) $S:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$; $\quad x^2+y^2\le 4$;

c) $S:\ x^2+y^2=1$.

2) Dado o sólido D no espaço xyz, achar um sólido E no espaço $r\theta\phi$ tal que $T(E)=D$. Desenhe D e E:

a) $D:\ 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4$;

b) $D:\ 3\le z\le\sqrt{25-x^2-y^2}$.

Funções Vetoriais

Definição Uma função vetorial de uma variável real em R^n é uma função com domínio contido em R, e imagem contida no espaço vetorial R^n.

Notação Se P é uma função vetorial em R^n denotaremos: D_P =domínio de P, contido em R; C_P = imagem de

$P(t)$, contida em R^n. Assim, podemos escrever $P: D_P \subset R \to R^n$, tal que $\forall t \in D_P$, fica associado $P(t) \in R^n$.

Uma vez que $t \in D_P \subset R$ e $P(t) \in R^n$ podemos indicar $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ onde, para cada $i = 1, ..., n$, temos que $x_i : D_P \subset R \to R$, .

Exemplo 1) Desenhe a imagem, C_P, onde $P(t) = (\,1+t, 1-t\,)$, $t \in R$.

Limite e Continuidade de Funções Vetoriais

Seja $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ uma função vetorial em R^n, com $t \in D_P$; t_0 um ponto de acumulação de D_P.

Definição Dizemos que $P_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ é o limite de $P(t)$ quando t tende a t_0 se para cada $i \in \{1,2...,n\}$ tivermos $\lim\limits_{t \to t_0} x_i(t) = x_i^0$ e escrevemos $\lim\limits_{t \to t_0} P(t) = P_0$.

Logo, $\lim\limits_{t \to t_0} P(t) = (\lim\limits_{t \to t_0} x_1(t), \lim\limits_{t \to t_0} x_2(t), ..., \lim\limits_{t \to t_0} x_n(t))$.

Definição Dizemos que P é contínua em $t_0 \in D_P \cap D_P{}'$ se $\lim\limits_{t \to t_0} P(t) = P(t_0)$.

Observação Se $P(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ então P é contínua se e somente se $x_i(t)$ é contínua para todo $i \in \{1,2...,n\}$.

Definição Dizemos que P é contínua em $A \subset D_P$ se P é contínua em todo $t \in A$.

Exemplos Estude o limite e a continuidade das funções vetoriais dadas nos pontos indicados nos casos:

i) $P(t) = \left(\ln(1+t), \sqrt{1+t^2}, t \right)$ em $t_0 = 0$.

ii) $P(t) = \left(\dfrac{t^2-4}{t-2}, \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, 3 \right)$ em $t_0 = 0$ e $t_0 = 2$.

iii) $P(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ em $t_0 \in R$.

Curvas – Equações Paramétricas

Definição Uma curva em R^n é a imagem $C_P \subset R^n$ de uma função vetorial P que é contínua e tem como domínio D_P um intervalo da reta R.

Isto é, uma curva em R^n é a imagem de uma função contínua $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $t \in I$, I intervalo.

O vetor $P(t)$ é chamado de vetor posição e varia quando t percorre I.

A equação $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, $t \in I$ é chamada uma parametrização de C_P.

Já as equações $x_1 = x_1(t);\ x_2 = x_2(t);...;x_n = x_n(t)$ são as equações paramétricas de C_P, nas quais t é o parâmetro.

Notemos que a mesma curva pode ter várias parametrizações como pode ser visto com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, esta pode ser descrita pelas parametrizações:
i) $P(t) = (\cos t, sent),\ t \in [0, 2\pi]$;
ii) $P(t) = (\cos 2\pi t, sen 2\pi t),\ t \in [0,1]$.

Em R^2 uma curva tem as equações paramétricas $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$. Eliminando-se t nas equações acima obtemos uma equação em x e y, chamada de equação cartesiana da curva.

Em geral, o conjunto de pontos que satisfazem a equação cartesiana contém (as vezes propriamente) a curva em questão.

<u>Exemplo</u> Para $P(t) = (\sqrt{t}, t),\ t \geq 0$

<u>Notação</u> A função $P(t)$ também pode ser representada na forma $P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, onde $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é a base canônica do espaço R^2 , isto é, $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$.

Em R^3 representamos a curva pelas equações paramétricas $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I$. Analogamente "podemos" eliminar t nas equações acima, obtendo agora duas equações em x, y, z chamadas equações cartesianas de C_P.

Cada equação cartesiana representa uma "superfície" e C_P é a intersecção das duas (ou está contida nessa intersecção).

<u>Notação:</u> Também podemos representar $C_P \subset R^3$ pela equação $P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in I$ onde $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é a base canônica em R^3.

<u>Exemplos:</u>

i) Descrever geometricamente a curva dada por $P(t) = (sen t,\ sen t,\ \cos t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ii) Descrever geometricamente a curva dada por $P(t) = (2\cos t, sen t)$ nos casos a) $D_P = [0, \pi]$; b) $D_P = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ e c) $D_P = [0, 2\pi]$.

iii) Idem para $P(t) = (\operatorname{sen} t)\vec{i} + (\cos^2 t)\vec{j}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

iv) Idem para $x = t$; $y = \cos t$; $z = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 4\pi]$.

v) Idem para $P(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in R$.

vi) Idem para $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, $t \in R$.

vii) Idem para $P(t) = (e^{-t}\cos t,\ e^{-t} sen t,\ e^{-t})$, $t \geq 0$.

Derivada de uma Função Vetorial

Definição Se $P(t)$ é uma função vetorial em R^n definimos $P'(t)$ por $P'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{P(t+h) - P(t)}{h}$, quando tal limite existe.

Assim $P'(t)$ é uma função vetorial cujo domínio é o conjunto dos $t \in R$ para os quais tal limite existe.

Teorema Se $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ então teremos $P'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), ..., x'_n(t))$, e o domínio de $P'(t)$ é a intersecção dos domínios de $x'_1(t),\ x'_2(t), ..., x'_n(t)$, isto é, $\bigcap_{i=1}^{n} D_{x_i'} = D_{P'}$.

Observação Assim $P'(t)$ existe se existe $x'_i(t)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Exemplos: Determinar $P'(t)$ para :

i) $P(t) = (\operatorname{sen} 3t,\ \cos^2 2t)$;

ii) $P(t) = (e^t \cos t,\ \ln t^2,\ t^5,\ 2 \operatorname{sen} t)$.

Teorema Se P é derivável então P é contínua.

Interpretação Geométrica – Tangência

Seja $P : D_P \subset R \to R^n$, C_P a curva em R^n descrita por P.

A direção do vetor $P(t+h)-P(t)$ é a mesma do vetor $\frac{1}{h}[P(t+h)-P(t)]$.

Se existe $P'(t)$ e é não nulo, a direção de $\frac{1}{h}[P(t+h)-P(t)]$ aproxima-se da direção de $P'(t)$ pois $P'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h}$.

Assim, quando existe e é não nulo, $P'(t)$ é o vetor tangente à curva C_P no ponto $P(t)$.

A reta determinada por $P(t)$ e $P'(t)$ é chamada de reta tangente à C_P no ponto $P(t)$ e é dada por $L=\{P(t)+\lambda P'(t)\ /\ \lambda\in R\}$.

Quando $P'(t)=\vec{0}$ o vetor tangente e, consequentemente, a reta tangente, não são definidos.

Exemplos:

i) Se $P(t)=(\cos t,\ sent)$, $t\in[0,2\pi]$ então temos que

ii) Encontre a equação da reta tangente à curva C_P, para a qual $P(t)=(\cos t,\ sent, sent)$, $t\in[0,2\pi]$ em $P_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Se P é uma função vetorial derivável cuja imagem dá o movimento de uma partícula, digamos em R^3, a condição $\|P(t)\| =$ constante c, $c > 0$, impõe que esse movimento se dê sobre uma esfera de raio c e centro na origem. Assim o vetor tangente à curva em um ponto $P(t)$, deve ser tangente à esfera neste ponto, isto é, $P'(t) \perp P(t)$. De fato:

Isto demonstra o seguinte teorema

<u>Teorema</u> Se uma função vetorial P, derivável em I, tem comprimento constante (isto é, $\| P(t) \| = c$, $c =$constante, para todo $t \in I$) então $P'(t) \cdot P(t) = 0$, qualquer que seja $t \in I$.

<u>Definição</u> Se a imagem de $P(t)$ descreve a trajetória de uma partícula então para cada $t \in D_P$ definimos:

$P(t) =$ vetor posição da partícula
$P'(t) =$ vetor velocidade da partícula
$P''(t) =$ vetor aceleração da partícula
$\| P'(t) \| =$ velocidade escalar da partícula
$\| P''(t) \| =$ aceleração escalar da partícula

<u>Reparametrização</u>

Consideremos a função vetorial $P : [a,b] \to R^n$ e seja $\phi : [c,d] \to [a,b]$ bijetiva, $\phi(s) = t$. Nessa situação podemos obter a composta $Q = Po\phi : [c,d] \to R^n$.

Nestas condições dizemos que ϕ é uma mudança de parâmetros e $Q = Po\phi$ é uma reparametrização de C_P. Caso $\|Q'(s)\| = 1,\ \forall s \in D_Q$ diremos que Q é uma reparametrização por comprimento de arco da curva C_P.

Comprimento de Arco

Seja C_P uma curva de R^n dada pela função vetorial $P:[a,b] \to R^n$.

Se $\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ é uma partição de [a,b], isto é, $t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ denotamos $\Delta_j t = t_j - t_{j-1}$ o comprimento de $[t_{j-1}, t_j]$.

A norma dessa partição é definida por $|\Delta| = \max\{\ \Delta_j t,\ j = 1,...,n\ \}$.

Indicamos por P o conjunto de todas as partições de [a,b].

A expressão $L_\Delta = \sum_{j=1}^{n} \left\| P(t_j) - P(t_{j-1}) \right\|$ dá o comprimento da poligonal que passa pelos pontos $P(t_0), P(t_1), ..., P(t_n)$, uma vez fixada Δ.

<u>Definição</u> O comprimento de arco da curva C_P de $P(a)$ até $P(b)$ é definido por $\lim_{|\Delta| \to 0} L_\Delta = L(a,b)$, onde Δ varia em P. Desde que o limite exista.

<u>Observação</u> Se L é um número real, dizemos que C_P é uma curva retificável.

Teorema Se $P(t)$ é uma função vetorial derivável com $P'(t)$ contínua em [a,b], o comprimento $L(a,b)$ é dado por $L(a,b) = \int_a^b \| P'(t) \| dt = \int_a^b v(t)dt$.

Observação Se uma curva C é dada como gráfico de uma função $f:[a,b] \to R$ com derivada contínua em [a,b] então o comprimento de C é dado por

$$L(a,b) = \int_a^b \| P'(t) \| \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} \, dt \qquad \text{onde}$$

$P(t) = (t, f(t))$, $t \in [a,b]$.

Exemplos Determinar o comprimento de arco de C_P, onde: 1) $P(t) = (t^3, 2t^2)$, $t \in [0,2]$.

2) $P(t) = (\cos t, sent, t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Integrais Múltiplas

Integrais Duplas

Seja $z = f(x,y)$ uma função positiva, definida em um conjunto limitado D. Suponha que o retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ contenha D.

Dividimos $[a,b]$ e $[c,d]$ em m e n subintervalos, respectivamente, sendo que os subintervalos de $[a,b]$ medem $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$ e os subintervalos de $[c,d]$ medem $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$.

Nesse processo obtemos os pontos: $x_0 = a < x_1 < ... < x_m = b$ e $y_0 = c < y_1 < ... < y_n = d$.

Traçamos por estes pontos retas paralelas aos eixos e obtemos $m \cdot n$ sub-retângulos R_{ij} de R. Em cada R_{ij} escolhemos um ponto (ζ_i, η_j) e formamos o paralelepípedo P_{ij} de base R_{ij} e altura $f(\zeta_i, \eta_j)$.

A soma dos volumes desses paralelepípedos é dada por:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_j)\Delta x \Delta y \text{, onde } f(\zeta_i, \eta_j) = 0 \text{ se } (\zeta_i, \eta_j) \notin D$$

Se existir um limite para esta soma na medida em que $m \to +\infty$ e $n \to +\infty$ (equivalentemente $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$), tal limite será chamado de <u>Integral</u> da função $z = f(x, y)$ sobre o domínio D. Diremos então que f é integrável sobre D.

<u>Notação:</u>

$$\lim_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_j)\,\Delta x \Delta y = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

ou ainda,

$$\lim_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_j)\,\Delta x \Delta y = \iint_D f dA.$$

Neste caso, como a função é positiva, esse limite representa o volume do sólido limitado pelo gráfico de f, pelo conjunto D, e pelas retas que passam pela fronteira de D e são paralelas ao eixo z.

Podemos repetir o procedimento acima com uma função f qualquer, se o limite existir ele será a integral de f sobre D e f será integrável em D.

A existência do limite acima depende não apenas do comportamento da função f, mas também das propriedades do domínio D.

Estudaremos a seguir algumas condições que garantem a existência da integral.

<u>Definição</u> Uma curva C_P do plano com parametrização $P(t)$, $t \in [a,b]$ é uma curva regular se $P'(t)$ é contínua e $\|P'(t)\| \neq 0,\ \forall t \in [a,b]$.

<u>Definição</u> A fronteira de um conjunto $D \subset R^2$, denotada ∂D, é dita regular se é constituída de um número finito de curvas regulares.

Podemos enunciar agora uma condição suficiente para que uma função seja integrável em seu domínio.

<u>Teorema</u> Se f é contínua num domínio compacto D, com ∂D regular, a integral de f existe em D.

Definição Se D é uma figura plana com fronteira regular, definimos a área de D, $A(D)$, como a integral de $f(x,y) \equiv 1$ em D, isto é $A(D) = \iint_D dxdy = \iint_D dA$.

Teorema (Integral Iterada ou Repetida)

i) Sejam ϕ_1 e ϕ_2 funções contínuas em $[a,b]$ tal que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$, consideremos o conjunto $D = \{ (x,y) \in R^2 \ / \ a \leq x \leq b \ \ e \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ e suponha que $f(x,y)$ é contínua em D. Então

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_{1(x)}}^{\phi_{2(x)}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

ii) De modo análogo se $D = \{(x,y) \in R^2 \ / \ c \leq y \leq d$ $e \ \ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$ onde φ_1 e φ_2 são funções contínuas em $[c,d]$ com $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$, $\forall\, y \in [c,d]$ então

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_{1(y)}}^{\varphi_{2(y)}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exemplos:

1) Calcular a integral da função $f(x,y) = 2x + 6x^2y^2$ no domínio $D = \{(x,y) \in R^2 \ / \ |x| \leq 1$ e $|y| \leq 1\}$.

2) Calcular a integral de $f(x,y) = x^3 + 4y$ no domínio $D = \{(x,y) \in R^2 \ / \ 0 \leq x \leq 2 \ \ e \ \ \phi_1(x) = x^2 \leq y \leq \phi_2(x) = 2x\}$. Calcule a área de D.

3) Calcular a integral da função $f(x, y) = x \cdot \sqrt{y}$ no domínio D limitado pelas retas, $y = 0$, $x + y = 2$ e pela parábola $x = y^2$.

4) Calcular o volume do sólido no primeiro octante limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$.

<u>Teorema</u> Seja $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ contínua no retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ então temos que :

$$\iint_R F(x, y) dxdy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

<u>Propriedades Da Integral</u>

a) Se $\alpha, \beta \in R$ então $\iint_D [\alpha \cdot f(x, y) + \beta \cdot g(x, y)] dxdy =$
$= \alpha \cdot \iint_D f(x, y) dxdy \; + \; \beta \cdot \iint_D g(x, y) \, dxdy$;

b) Se $D = D_1 \cup D_2$ são domínios disjuntos ou têm em comum apenas um número finito de curvas regulares então:
$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D_1} f(x, y) dxdy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dxdy$;

c) Se $f \geq g$ em D então $\int_D f(x, y) dxdy \geq \int_D g(x, y) dxdy$.

Teorema (da Média) Seja f uma função contínua em D (compacto com fronteira regular), então existe pelo menos um ponto $(\zeta,\eta)\in D$ tal que

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\zeta,\eta)\cdot\iint_D dxdy = f(\zeta,\eta)\cdot A(D),$$

onde $A(D)$ é a área de D.

Mudança de Coordenadas na Integral Dupla

Suponha que um domínio D' seja transformado no domínio D por meio de uma transformação bijetiva $T:\begin{cases} x = x(u,w) \\ y = y(u,w)\end{cases}$. Se $x(u,w)$ e $y(u,w)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que seja válido $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_w \\ y_u & y_w \end{vmatrix} \neq 0$ em D' então

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,w),y(u,w))\cdot|J|\cdot dudw.$$

Exemplo 1 Calcule $\iint_D sen(x^2+y^2)dxdy$, onde D é a região dada por $x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0$.

Exemplo 2 Calcule $\iint_D 2y\,dxdy$, onde D é a região do 1º quadrante limitada pelas circunferências $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $C_2 : x^2 + y^2 = 4$.

Massa e Centro de Massa de uma Placa Plana

Seja D uma placa plana com densidade de massa $\rho(x, y)$ por unidade de área, no ponto $(x, y) \in D$, então a massa total da placa é dada por:

$$M = \iint_D \rho(x, y)dxdy.$$

Além disso as coordenadas do centro de massa da placa são: $x_c = \frac{M_y}{M}$ e $y_c = \frac{M_x}{M}$ onde temos $M_y = \iint_D x\rho(x, y)dxdy$ e $M_x = \iint_D y\rho(x, y)dxdy$.

Exemplos:

1) Uma placa tem a forma da região R do plano xy limitada pelos gráficos de $x = y^2$ e $x = 4$. Determine o centro de massa, se a densidade no ponto (x, y) é diretamente proporcional a distância de (x, y) até o eixo y.

2) Calcule a massa e o centro de massa de um semicírculo de raio a, sendo a densidade superficial no ponto P proporcional a distância do ponto ao centro do círculo.

Momento De Inércia

Se D é uma placa com densidade de massa $\rho(x,y)$ por unidade de área no ponto $(x,y)\in D$ então definimos:

a) O momento de inércia da placa D em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$ é $I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy$.

b) O momento de inércia da placa D em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$ é $I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$.

c) O momento de inércia da placa D em relação a origem é $I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$.

Exemplo Uma lâmina de material com densidade variável ocupa o quadrado R cujos vértices são $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) e $(0,a)$. A densidade num ponto (x,y) é o produto das distâncias de P aos eixos. Calcule seu momento de inércia em relação ao eixo x.

Integrais Triplas

Definição Uma superfície regular em R^3 é um conjunto de pontos de R^3 que é gráfico de uma função contínua com derivadas contínuas, de um dos tipos: $z = z(x,y)$, $y = y(x,z)$ ou $x = x(y,z)$.

Definição A fronteira de um subconjunto $D \subset R^3$ é regular se pode ser obtida como reunião de um número finito de superfícies regulares.

Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua em um domínio compacto D com fronteira regular. Sendo D limitado, existe um paralelepípedo $R = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ contendo D.

Com planos paralelos aos planos coordenados dividimos R em n subparalelepípedos $R_1, R_2, ..., R_n$ em cada um dos quais tomamos pontos $P_1, P_2, ..., P_n$ respectivamente.

Em seguida fazemos a soma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot V(R_i)$, onde $V(R_i)$ é o volume do subparalelepípedo R_i e $f(P_i) = 0$ se $P_i \notin D$.

Suponha agora que a diagonal maior, d_i, de cada R_i, tende a zero quando n tende a infinito, temos então a seguinte :

Definição Definimos a integral de f sobre D como sendo o número real

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Pelas hipóteses consideradas tal limite existe e é finito. Dizemos então que f é integrável em D.

<u>Definição</u> O volume do domínio $D \subset R^3$, com fronteira regular, é definido por $V(D) = \iiint_D dxdydz$.

<u>Notação</u> As vezes a integral de f é denotada por $\int_D f(P)dV$ ou $\int_D f\,dV$.

<u>Propriedades da Integral Tripla</u>

a) Se α, β são constantes e f, g são funções então temos

$$\int_D [\alpha \cdot f + \beta \cdot g]dV = \alpha \cdot \int_D f\,dV + \beta \cdot \int_D g\,dV .$$

b) Se $D = D_1 \cup D_2$, onde $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ ou se interceptam em um número finito de superfícies regulares então

$$\int_D f(P)dV = \int_{D_1} f(P)dV + \int_{D_2} f(P)dV .$$

c) Se $f(x,y,z) \geq 0$ em D, então $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz \geq 0$.

d) Se $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ em D então temos que

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz \geq \iiint_D g(x,y,z)dxdydz .$$

e) $\left| \iiint_D f(x,y,z)dxdydz \right| \leq \iiint_D |f(x,y,z)|\,dxdydz$.

Teorema Da Média

Se *f(x,y,z)* é contínua no compacto com fronteira regular D, então existe $P' \in D$ tal que vale:

$\iiint_D f(P)dV = f(P')\, V(D)$, onde $V(D) =$ volume de D.

O cálculo de uma integral tripla, em geral, é efetuado por redução a uma integral simples, seguida de uma integração dupla.

Teorema Seja $D \subset R^3$ um domínio limitado por duas superfícies regulares de equações $z = g_1(x, y)$ e $z = g_2(x, y)$, definidas na mesma região R do plano, tal que $g_1(x, y) \le g_2(x, y)$, $\forall (x, y) \in R$. Se f é contínua em D então f é integrável em D e vale

$$\iiint_D f(x, y.z)dxdydz = \iint_R \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy.$$

Exemplos:

1) Determine o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelo plano $y + z = 4$, pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos xy e yz.

2) Calcule $\iiint_B \left(x^2 + z^2\right) dxdydz$, onde $B = \{(x, y, z) \in R^3 /$ $x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

3) Calcular o volume do sólido S, no 1º octante, limitado pelo plano $x = y$ e pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$.

<u>Massa Centro de Massa e Momento de Inércia de um Sólido</u>

Seja $\rho(x, y, z)$, a função densidade de massa de um sólido S.

<u>Definição</u> A massa total de S é dada pela integral $M = \iiint_S \rho(x, y, z)\, dxdydz$.

<u>Definição</u> O centro de massa de S é o ponto $c = (x_c, y_c, z_c)$ onde :

$$x_c = \frac{1}{M} \iiint_S x\rho(x, y, z) dxdydz \ ;$$

$$y_c = \frac{1}{M} \iiint_S y\rho(x, y, z) dxdydz \ ;$$

$$z_c = \frac{1}{M} \iiint_S z\rho(x, y, z) dxdydz.$$

<u>Definição</u> O momento de inércia de S em relação:

i) ao eixo z é $I_z = \iiint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dxdydz$;

ii) ao eixo x é $I_x = \iiint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) dxdydz$;

iii) ao eixo y é $I_y = \iiint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) dxdydz$.

Mudança de Variáveis nas Integrais Triplas

Teorema Seja $S \subset R^3$, S compacto com fronteira regular e consideremos $T : S' \longrightarrow S$ uma transformação injetora de S' sobre S, dada por $T: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$, com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas e tal que $J_T \neq 0$ em S', então se $f(x,y,z)$ é contínua em S, vale

$$\iiint_S f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint_{S'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|J_T\right| dudvdw.$$

Exemplos: 1) Calcule o volume da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, usando integrais triplas, fazendo mudança de variáveis e utilizando: a) coordenadas cilíndricas; b) coordenadas esféricas.

2) Calcule $\iiint_B z\, dxdydz$, onde $B = \{(x,y,z) \in R^3 /\ 1 \leq$
$\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.

3) Calcule a massa da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ supondo que a densidade no ponto (x,y,z) é igual a distância deste ponto até a origem.

Integrais De Linha

Seja C uma curva em R^n com parametrização dada por $P:[a,b] \longrightarrow R^n$, temos:

Definição C é dita de classe C^1 ou continuamente diferenciável se $P'(t)$ é contínua em $[a,b]$.

Definição C é dita lisa ou regular se é de classe C^1 e $P'(t) \neq \vec{0}, \ \forall t \in [a,b]$.

Definição C é dita lisa por partes ou regular por partes se C é formada de um número finito de curvas lisas $C = C_1 \vee C_2 \vee ... \vee C_n$.

Observações: i) A parametrização $P(t)$, $t \in [a,b]$, ordena os pontos de C de acordo com valores crescentes de t, assim C é dito um conjunto ordenado ou orientado.

ii) O mesmo conjunto C com orientação oposta é a curva que indicamos $-C$, que pode ter a seguinte parametrização $Q(t) = P(a+b-t), t \in [a,b]$.

Definição C é uma curva símples se $P(t_1) \neq P(t_2)$ sempre que $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in (a,b)$.

Definição C é uma curva fechada se $P(a) = P(b)$.

<u>Definição</u> Seja Ω um subconjunto de R^2 ou R^3 então:

i) Ω é conexo por caminhos se quaisquer dois pontos de Ω podem ser ligados por uma curva contínua contida em Ω.

ii) Ω é simplesmente conexo se toda curva fechada simples de Ω pode se reduzir continuamente a um ponto sem sair de Ω.

<u>Campos Vetoriais e Função Potencial</u>

<u>Definição</u> Seja Ω um aberto de R^n. Um campo vetorial em Ω é uma função $F:\Omega \longrightarrow R^n$ que associa a cada ponto de Ω um vetor de R^n.

<u>Observação</u> Um campo vetorial definido em R^2 admite as representações $F(x,y) = f(x,y)\cdot\vec{i} + g(x,y)\cdot\vec{j} =$ $= (f(x,y), g(x,y))$, onde $\vec{i}$ e $\vec{j}$ formam a base canônica de R^2 e $f(x,y)$, $g(x,y)$ são funções reais definidas em Ω.

<u>Exemplos</u>: 1) Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em um aberto $\Omega \subset R^2$ então $\nabla f = (f_x, f_y)$ é um campo vetorial em Ω.

2) $F(x,y,z) = (e^x, xy + z^3, 2y)$ é um campo vetorial em R^3.

<u>Definição</u> Dizemos que um campo vetorial F é conservativo, ou irrotacional, em Ω se existe uma função diferenciável φ, definida em Ω, tal que $F = \nabla\varphi$. Nesse caso, φ é dita função potencial para F.

Observações: i) Os campos considerados pela Física Clássica são, na maioria, conservativos.

ii) Se F admite uma função potencial ela é única, a menos de uma constante.

Campo Conservativo no Plano

Seja Ω um aberto de R^2 e sejam $f(x,y)$, $g(x,y)$ funções com derivadas parciais contínuas em Ω. Consideremos o campo vetorial $F(x,y) = = (f(x,y), g(x,y))$. Então vale o

Teorema a) Se F é conservativo em Ω então $f_y = g_x$, $\forall (x,y) \in \Omega$.

b) Se $f_y = g_x$ em Ω e Ω é simplesmente conexo, então F é conservativo em Ω.

Exemplos Verifique se o campo dado é conservativo. Em caso afirmativo determine uma função potencial para o campo, nos casos:

1) $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$ em $R^2 - \{(0,0)\}$.

2) $F(x,y) = (x^2 + xy, x^3 + xy)$ em R^2.

<u>Divergente e Rotacional de Campos Vetoriais em Abertos de R^3</u>

<u>Definição</u> Sejam f, g, h funções com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas no aberto $\Omega \subset R^3$ e consideremos $F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z))$ um campo vetorial definido em Ω,

1) O Divergente de F é definido por

$$div\, F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = f_x + g_y + h_z = \nabla \cdot F \text{ (Notação);}$$

2) O Rotacional de F em Ω é definido por

$$rot\, F = (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y) = \nabla \times F \text{ (Notação).}$$

<u>Observação</u> Usamos a notação $\nabla \times F$ pois $rot\, F$ pode ser visto, simbolicamente, como produto vetorial de $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ por (f, g, h), isto é :

$$rot\, F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}.$$

Definições Dado um campo vetorial F temos que:
i) F é solenoidal se $divF = 0$;
ii) F é irrotacional se $rotF = \vec{0}$.

Campos Conservativos em R^3

Teorema Com as definições acima temos

a) Se F é conservativo em Ω então $rot\,F = \vec{0}$ em Ω.

b) Se $rot\,F = \vec{0}$ em Ω e Ω é simplesmente conexo, então F é consevativo.

Exemplos Determine se é conservativo o campo vetorial, se for ache uma função potencial:

1) $F(x, y, z) = (2xyz,\ x^2 z,\ x^2 y)$ em $\Omega = R^3$.
2) $F(x, y, z) = (2xyz,\ x^2 z + y,\ x^2 y + 3z^2)$ em $\Omega = R^3$.
3) $F(x, y, z) = (3z + 5x^2, x^2 + y^2, 3y + x^2)$ em $\Omega = R^3$.

Integrais De Linha

Seja C uma curva regular com parametrização $P(t)$, $t \in [a,b]$ e F um campo vetorial contínuo sobre um aberto $\Omega \subset R^n$, este contendo C.

Definimos a integral de linha de F ao longo de C por $\int_C F = \int_C F(P)dP = \int_a^b F(P(t))P'(t)dt$.

Observação Esta integral é interpretada como o trabalho realizado pela força F ao mover um objeto de $P(a)$ até $P(b)$ ao longo de C.

Exemplos Calcule a integral de linha do campo vetorial F sobre a curva C para:

1) $F(x, y, z) = (x, x^2 + y + z, xyz)$ e $C : P(t) = (t, 2t, 1)$ com $t \in [0,1]$.

2) $F(x, y) = \left(\dfrac{-y}{4x^2 + y^2}, \dfrac{x}{4x^2 + y^2} \right)$ e C tem por imagem a elipse $4x^2 + y^2 = 9$.

Propriedades da Integral de Linha

a) $\int_C \lambda F = \lambda \int_C F$, $\lambda = cte.$

b) $\int_C F + G = \int_C F + \int_C G$.

c) $\int_{-C} F = -\int_C F$.

d) Se $C = C_1 \cup ... \cup C_n$ então $\int_C F = \int_{C_1} F + ... + \int_{C_n} F$.

Veremos a seguir que $\left| \int_C F \right|$ independe da parametrização.

Sejam $C: P(t)$, $t \in [a,b]$ e F nas condições da definição de Integral de Linha. Seja também $\psi : [c,d] \to [a,b]$ uma reparametrização de C (crescente ou decrescente) com $Q(s) = P(\psi(s)) = P(t)$ se $s \in [c,d]$. Nestas condições temos

<u>Teorema</u> (Invariância por mudança de parametrização)

1) Se ψ é crescente temos $\int_C F = \int_a^b F(P(t))P'(t)dt =$ $= \int_c^d F(Q(s))Q'(s)ds$;

2) Se ψ é decrescente temos $\int_C F = \int_a^b F(P(t))P'(t)dt =$ $= -\int_c^d F(Q(s))Q'(s)ds$.

<u>Integral De Linha De Formas Diferenciais</u>

Se $F = (F_1,...,F_n)$ é um campo vetorial em Ω e $C: P(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$, $t \in [a,b]$ é uma curva contida em Ω então temos que $P'(t) = (x_1'(t),...,x_n'(t))$ e como $\frac{dx_i}{dt}(t) = x_i'(t)$, $\forall i \in \{1,...,n\}$, segue que $x_i'(t)dt = dx_i$, $\forall i \in \{1,...,n\}$ logo podemos operar a seguinte "manipulação simbólica":

$$F \cdot P'(t)dt = (F_1,...,F_n) \cdot (x_1'(t)dt,...,x_n'(t)dt) =$$

$$= (F_1,...,F_n) \cdot (dx_1,...,dx_n) = F_1dx_1 + ... + F_ndx_n),$$

que nos leva a escrever:

$$\int_C F = \int_a^b F(P(t))P'(t)dt = \int_C F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n .$$

Definição A expressão $F_1dx_1 + \ldots + F_ndx_n$ é chamada Forma Diferencial sobre Ω e a integral acima é a integral de linha dessa forma diferencial ao longo da curva C.

Exemplos 1) No plano, se $F = (M, N)$ e $C : P(t)$, $P(t) = (x(t), y(t))$ temos que

$$\int_C F = \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy .$$

2) No espaço se $F = (M, N, L)$ e $C : P(t)$, $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ temos que

$$\int_C F = \int_C M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + L(x, y, z)dz .$$

Definição Uma forma diferencial $F_1dx_1 + \ldots + F_ndx_n$ é dita exata em Ω se existe uma função diferenciável ψ, definida em Ω, tal que $d\psi = F_1dx_1 + \ldots + F_ndx_n$.

Teorema A forma diferencial $F_1dx_1 + \ldots + F_ndx_n$ é exata se e somente se o campo vetorial $F = (F_1, \ldots, F_n)$ é conservativo.

Exemplos: 1) Calcular a integral de linha da forma diferencial dada ao longo da curva dada nos casos:

a) $dx + xydy + zdz$ onde C é a interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ com o plano $x = y$ o sentido do percurso é de $(0,0,\sqrt{2})$ para $(1,1,0)$.

b) $xydx + y^2dy$ onde $C = C_1 \cup C_2$ com $C_1 : y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1$ e $C_2 : x = y^2,\ 0 \leq y \leq 1$ percorrida no sentido anti-horário.

2) Calcule $\int_C (4xy)\,dx + (2x^2 - 3xy)\,dy$, onde $C = C_1 \cup C_2$, C_1 é o segmento de reta ligando $(-3,-2)$ a $(1,0)$ e C_2 é o menor arco da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ ligando $(1,0)$ a $(0,1)$.

Integrais com Relação ao Comprimento de Arco

Seja C: $P(t)$, $t \in [a,b]$ uma curva lisa por partes de R^n, orientada segundo t crescente. Seja $w = f(x_1,...,x_n)$ contínua em $\boldsymbol{C}$. Nessas condições definimos:

$$\int_C f\,ds = \int_0^L f(Q(s))\,ds,$$

onde L é o comprimento de C e $Q(s)$ é a parametrização de C pelo comprimento de arco.

<u>Observação</u> Na prática quando tivermos de calcular uma integral do tipo definido acima não reparametrizaremos pelo comprimento de arco, usaremos o seguinte:

$$\int_C f\,ds = \int_0^L f(Q(s))\,ds = \int_a^b f(P(t))\|P'(t)\|\,dt$$

<u>Exemplos</u> Calcular as seguintes integrais:

1) $\int_C (x^2 + 2y^2)ds$ onde $C : P(t) = (\cos t, sent)$, $t \in [0,2\pi]$.

2) $\int_C xyz\,ds$ onde $C : P(t) = (\cos t, sent, t)$, $t \in [0,2\pi]$.

<u>Integrais de Linha Independentes do Caminho</u>

<u>Teorema</u> Seja F um campo vetorial de classe C^1 num aberto conexo por caminhos $\Omega \subset R^n$. São equivalentes as afirmações:

a) F é conservativo em Ω;

b) Se P e Q são pontos quaisquer de Ω, a integral de F ao longo de qualquer curva $C \subset \Omega$, que une P a Q, tem o mesmo valor, isto é, $\int_C F = \psi(Q) - \psi(P)$, onde ψ é uma função potencial para F;

c) Se C é uma curva fechada qualquer contida em Ω temos que $\int_C F = 0$.

Obsevações:

1) No plano, se $F = (M, N)$ é consevativo em Ω, uma função potencial ψ para F dada por

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\, dt \ , \ \forall (x, y) \in \Omega$$

onde (x_0, y_0) é um ponto fixo arbitrário em Ω.

2) No espaço se $F = (L, M, N)$ é consevativo em Ω, uma função potencial ψ para F é dada por $\psi(x, y, z) =$

$$= \int_{x_0}^{x} L(t, y_0, z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} M(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} N(x, y, t)\, dt$$

$\forall (x, y, z) \in \Omega$, onde (x_0, y_0, z_0) é um ponto fixo arbitrário de Ω.

Exemplo 1 Seja $F(x, y, z) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2} , \dfrac{x}{x^2 + y^2} , 0 \right)$ definido em $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \ \middle|\ (x, y) \neq (0,0) \right\}$. Mostre que $rotF = \vec{0}$ mas F não é conservativo.

Exemplo 2 Dado o campo vetorial $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right)$ encontre a integral de F sobre a curva regular γ, onde γ liga $(1,0)$ à $(0,2)$.

Proposição Se $C: P(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$ é lisa por partes e $f(x,y)$ é contínua nos pontos de C valem:

1) $\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt$;

2) $\int_C f(x,y)\,dy = \int_a^b f(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$.

Observação Valem fórmulas análogas para funções de três variáveis definidas sobre curvas no espaço.

Proposição

i) Seja C o gráfico da função derivável por partes $y=\psi(x)$, $x\in[a,b]$ (ψ não é derivável possivelmente em um número finito de pontos em $[a,b]$), isto é, C: $P(t)=(t,\psi(t))$, $t\in[a,b]$ então vale
$$\int_C Mdx+Ndy = \int_a^b M(t,\psi(t))\,dt + \int_a^b N(t,\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

ii) Seja C o gráfico da função derivável por partes $x=\varphi(y)$, $y\in[c,d]$, isto é, C: $P(t)=(\varphi(t),t)$, $t\in[c,d]$ então vale
$$\int_C Mdx+Ndy = \int_c^d M(\varphi(t),t)\varphi'(t)\,dt + \int_c^d N(\varphi(t),t)\,dt.$$

Teorema de Green no Plano

Definição Um aberto conexo D do plano é chamado de domínio simples se: i) é simplesmente conexo; ii) tem fronteira regular; iii) o fecho de D (denotado $\overline{D}$) pode ser escrito da seguinte forma

$$\overline{D} = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} =$$

$$= \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$, onde φ_1, φ_2, ψ_1 e ψ_2 são deriváveis por partes.

Geometricamente, um domínio simples intercepta qualquer reta paralela a um dos eixos em um único segmento ou não intercepta.

Exemplos 1) São domínios simples

a) D limitado pela circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$;

b) D limitado pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.

c) D limitado pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, tal que $x > 0$ e $y > 0$.

2) Não são domínios simples

a) D limitado pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y > 0$;

b) D a coroa circular $1 < x^2 + y^2 < 4$;

c) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}$.

<u>Observação</u> Deve-se notar que os conjuntos acima podem ser vistos como reunião finita de domínios simples.

<u>Proposição 1</u> Seja D um domínio simples e sejam $M(x,y)$, $N(x,y)$ funções com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas num aberto $\Omega \supset \overline{D}$. Então vale

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \; = \; \oint_{\partial D} Mdx + Ndy .$$

<u>Observações</u> i) Tal resultado pode facilmente ser estendido para domínios mais gerais que possam ser subdivididos em um número finito de domínios simples, por meio de um número finito de curvas regulares.

ii) O símbolo $\oint$ significa que as curvas são percorridas de modo que os pontos de D fiquem a esquerda.

iii) O domínio D abaixo pode ser subdividido em três domínios simples por meio das curvas C_1 e C_2:

<u>Proposição 2</u> Sejam D, D_1, D_2 e D_3 como na figura acima. Se $M(x,y)$, $N(x,y)$ são como na Proposição 1 temos

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy \; = \; \oint_{C_1 \cup C_3} Mdx + Ndy \quad +$$

$$+\oint_{C_4\cup C_2\cup C_6\cup(-C_1)} Mdx+Ndy \;+\; \oint_{C_5\cup(-C_2)} Mdx+Ndy\,.$$

Observando que $\int_{-C} F=-\int_C F$, podemos generalizar este resultado da seguinte maneira:

<u>Teorema 1 (Green)</u> Seja D um domínio simples do plano, (ou que pode ser decomposto em um número finito de domínios simples por meio de um número finito de curvas regulares por partes). Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um aberto $\Omega\supset\overline{D}$ então vale:

$$\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy \;=\; \oint_{\partial D} Mdx+Ndy\,.$$

O teorema acima pode ser usado para obtenção de áreas de domínios planos.

<u>Proposição3</u> Se D é um domínio plano como no teorema 1 vale $A(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy-ydx=\int_{\partial D} F$; onde $F=\frac{1}{2}(-y,x)$.

<u>Exemplo1</u> Calcule a integral da forma $Ldx+Mdy=(y+x^2\cos x)dx+(2x-y^2 seny)dy$ ao longo da circunferência $x^2+y^2=1$ no sentido anti-horário.

<u>Exemplo2</u> Use o teorema de Green para calcular a área da região limitada pela hipociclóide $C: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

<u>Teorema de Gauss (ou da divergência no plano)</u>

A fórmula $\iint_D \left(N_x - M_y\right) dxdy = \oint_C Mdx + Ndy$ pode ser escrita em termos do vetor normal exterior a fronteira do domínio D, em cada um de seus pontos

Se $\partial D = C:\ P(s) = (x(s), y(s))$, temos $dP = (dx, dy) = (x'(s), y'(s))ds$, isto é, $dP = Tds$, onde s é o elemento de arco sobre ∂D e T é o vetor tangente unitário (C está parametrizada pelo comprimento de arco).

Logo se $\vec{n} = (n_1, n_2)$ é o normal exterior unitário a D temos $\vec{T} = (-n_2, n_1)$ e dai $dP = (-n_2, n_1)ds$. Portanto temos que $dx = -n_2 ds$ e $dy = n_1 ds$.

<u>Teorema 2 (Gauss)</u>

Nas hipóteses do teorema de Green vale a identidade $\iint_D divF\ dxdy = \oint_{\partial D} F \cdot \vec{n}\, ds = \oint_{\partial D} F_n\, ds$, onde temos que $divF = \ = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y}$ e F_n é a projeção de $F = (M, N)$ sobre $\vec{n}$.

Teorema 3 (Identidade de Green)

Sejam $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ com derivadas parciais contínuas até segunda ordem num aberto $\Omega \supset \overline{D}$. Então valem :

i) $\iint_D (v \cdot \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dxdy = \oint_{\partial D} v \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds$;

ii) $\iint_D (u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u)\, dxdy = \oint_{\partial D} \left(u \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds$, onde $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

O Teorema da Divergência e o Teorema de Stokes

Introduziremos agora a noção de área de uma superfície e posteriormente definiremos integral de uma função definida sobre uma superfície.

Proposição 1 Seja π um paralelogramo no espaço e $\vec{n}$ seu vetor normal. Se R é a projeção de π sobre o plano xy e se γ é o ângulo entre $\vec{n}$ e $\vec{k}$, temos que vale

$$A(R) = A(\pi) \cdot |\cos \gamma| .$$

Seja S uma superfície que é gráfico de uma função $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, $z \in C^1(\Omega)$ onde $\Omega \supset D$ (D limitado), D com fronteira regular por partes. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto qualquer de S, denotaremos por $\vec{n} = \vec{n}(P)$ o vetor normal unitário à S em P.

Como D é limitado, existe um retângulo $R : a \le x \le b$, $c \le y \le d$, contendo D. Vamos dividir R em n subretângulos $R_1, R_2, ..., R_n$.

Seja $Q_j = (x_j, y_j)$ um ponto qualquer de R_j e $P_j = (x_j, y_j, z(x_j, y_j))$ o ponto correspondente em S.

As retas paralelas ao eixo z pelos lados de R_j determinam o elemento de superfície ΔS_j em S, e o paralelogramo π_j no plano tangente à S pelo ponto P_j.

Como $z(x, y)$ é diferenciável, o plano tangente tende a se confundir com a superfície S numa vizinhança do ponto de tangência. Isto é, ΔS_j tende a se confundir com π_j.

Então a área $A(\pi_j)$ será uma aproximação do que devemos entender por área de ΔS_j, isto é, teremos que $A(\pi_j) \approx A(\Delta S_j)$, sendo tal aproximação tanto melhor quanto menor for o diâmetro de R_j, logo de π_j.

Por outro lado, a área da projeção de π_j no plano xy é igual a área de R_j, isto é, $A(R_j) = A(\pi_j) \cdot |\cos \gamma_j|$ logo $A(R_j) \approx A(\Delta S_j) \cdot |\cos \gamma_j|$, γ_j é o ângulo entre o vetor $\vec{k}$ e o vetor normal à superfície no ponto P_j.

Segue que a área de S, $A(S)$, que é a soma das áreas dos elementos ΔS_j, é aproximadamente

$$A(S)=\sum_{j=1}^{n} A(\Delta S_j) \;\approx\; \sum_{j=1}^{n} A(\pi_j)=\sum_{j=1}^{n} \frac{A(R_j)}{\left|\cos\gamma_j\right|}.$$

<u>Definição 1</u> Nas condições acima temos que a área de S, denotada $A(S)$, será $A(S)=\lim\limits_{\delta_n \to 0}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{A(R_j)}{\left|\cos\gamma_j\right|}\right)$, onde $\delta_n = \max\limits_{1\le j\le n} \{diam\, R_j\}$ desde que tal limite exista.

<u>Notação</u> $A(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$.

<u>Definição 2</u> Se $S:\ y=y(x,z)$, $(x,z)\in D$, com $y(x,z)$ e D em condições análogas a da definição 1, temos que $A(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{dxdz}{|\cos\beta|}$, onde β é o ângulo entre os vetores $\vec{n}$ e $\vec{j}$.

De modo análogo $A(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{dydz}{|\cos\alpha|}$, onde α é o ângulo entre $\vec{n}$ e $\vec{i}$.

<u>Proposição 2</u> Com as notações da definição 1 temos

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}\ dxdy \ .$$

Analogamente para $S: y = y(x,z)$ ou $S: x = x(y,z)$ temos que $\iint_S dS = \iint_D \sqrt{(y_x)^2 + (y_z)^2 + 1}\ dxdz$ ou $\iint_S dS = \iint_D \sqrt{(x_y)^2 + (x_z)^2 + 1}\ dydz$, respectivamente.

<u>Definição 3</u> Seja $w = f(x,y,z)$ uma função definida em S (S como na definição 1) tal que $f(x,y,z(x,y))$ é contínua $\forall (x,y) \in D$. A integral de f sobre S é definida por $\iint_S f\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1}\ dxdy =$

$$= \iint_D \frac{f(x,y,z(x,y))}{|\cos \gamma|}\ dxdy.$$

<u>Proposição 3</u> Se $S:\ F(x,y,z) = 0$, $F_z \neq 0$, temos que

(a) $\iint_S dS = \iint_D \dfrac{\left((F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|F_z|}\ dxdy$;

(b) $\iint_S f\, dS =$

$$= \iint_D f(x,y,z(x,y)) \frac{\left((F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|F_z|}\ dxdy,$$

onde D é um domínio conveniente.

<u>Observação</u> A área de S e a integral de f sobre S podem ser expressas como integrais no plano yz ou xz,

desde que S seja dada na forma $x = x(y,z)$ ou na forma $y = y(x,z)$, respectivamente.

<u>Definição 4</u> Suponha que $S: z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$ e seja $\rho = \rho(x,y,z)$ a densidade sobre S tal que $\rho(x,y,z(x,y))$ é contínua para $(x,y) \in D$. O momento de inércia sobre S em relação ao eixo x é definido por

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z(x,y))\,dS \;;$$

e, analogamente, temos

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\,\rho\,dS;$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\,\rho\,dS.$$

<u>Proposição 4</u> Se S é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ (ou $z \leq 0$) temos que vale $dS = R^2 sen\phi\, d\phi d\theta$, onde θ e ϕ são as coordenadas esféricas de S. Além disso, se $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ e $\phi_1(\theta) \leq \phi \leq \phi_2(\theta)$ temos as fórmulas

(a) $\iint_S dS = R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} sen\phi\, d\phi d\theta$;

(b) $\iint_S f\,dS =$

$$= R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(R\cos\theta sen\phi, Rsen\theta sen\phi, R\cos\phi) sen\phi\, d\phi d\theta.$$

Observação Valem fórmulas análogas à (a) e (b) acima no caso em que $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ e $\theta_1(\phi) \leq \theta \leq \theta_2(\phi)$.

Exemplos Calcule a área das superfícies:

1) S: Parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ interior a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.
2) S: Parabolóide $z = 16 - x^2 - y^2$ sobre o domínio $D: 2 \leq x^2 + y^2 \leq 6$.
3) S: Parte do hemisfério $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ interior a superfície cilindrica $x^2 + y^2 = 4y$.

Exemplos Calcule a integral da função $w = f(x,y,z)$ sobre a superfície S para:

1) $w = f(x,y,z) = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, S: parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ compreendida entre os planos $z = 3$ e $z = 4$.

2) $w = F \cdot \vec{n}$, $F(x,y,z) = (senz, xy, -\cos z)$, $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a superfície S, onde S é a fronteira do sólido $x^2 + y^2 \leq 36$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $0 \leq z \leq \pi$.

<u>Definição</u> Um sólido R do espaço é dito simples se:

(1) Sua fronteira (∂R) é regular;
(2) Suas projeções sobre os planos coordenados são conjuntos compactos com fronteiras regulares;
(3) Qualquer reta paralela aos eixos coordenados intercepta o sólido em um segmento único ou não o intercepta.

<u>Teorema (da Divergência ou de Gauss-Ostrogradsky)</u>

Seja R um sólido do espaço que pode ser dividido em um número finito de sólidos simples. Seja $F=(L,M,N)$ um campo vetorial definido em um aberto $\Omega \supset \overline{R} = \partial R \cup R$, tal que L, M, N têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então vale:

$$(1) \quad \iiint_R divF\, dV = \iint_{S=\partial R} F \cdot \vec{n}\, dS \ ,$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a $S=\partial R$ em cada ponto de S.

<u>Proposição 1</u> Com as notações do teorema anterior se α, β, γ são os ângulos que $\vec{n}$ faz com os semi-eixos positivos x, y, z, respectivamente, então vale

$$(2) \quad \iiint_R (L_x + M_y + N_z) dV =$$

$$= \iint_{\partial R} (L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\gamma) dS =$$

$$= \iint_{\partial R} Ldydz + Mdxdz + Ndxdy \ .$$

Exemplo Calcule a integral de superfície de $w = F \cdot \vec{n}$, onde $F(x, y, z) = (senz,\, xy,\, -\cos z)$; $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior a superfície S, onde S é a fronteira do sólido $x^2 + y^2 \le 36$; $x \ge 0$; $y \ge 0$; $0 \le z \le \pi$.

Fluxo e Interpretação do Divergente

Fisicamente se considerarmos um escoamento de matéria no espaço a integral $\iint_{\partial R} F \vec{n}\, dS$ pode ser interpretada como sendo o fluxo através da fronteira ∂R, isto é, a massa total que escapa de R por unidade de tempo.

Já $\iiint_R divF\, dV$ mede a razão na qual a densidade decresce dentro de R, isto é, a perda global de massa por unidade de tempo.

Nessas condições há perda de massa somente quando ela atravessa a fronteira ∂R por isso o fluxo $\iint_{\partial R} F \vec{n}\, dS$ é igual a divergência total $\iiint_R divF\, dV$.

Teorema de Stokes

Proposição 1 Nas hipóteses do Teorema de Green se $F = (M, N) = (M, N, 0)$ então vale

(1) $\iint_D rotF \cdot \vec{k}\ dxdy = \int_{\partial D} F \cdot \vec{T}\ ds$, onde $\vec{T}$ é o vetor tangente a ∂D e ds é o elemento de arco sobre ∂D.

Nosso objetivo é estender a última proposição para campos vetoriais no espaço, substituindo o domínio D por uma superfície S do espaço. A fronteira ∂D será substituída pelo "bordo" C de S e o vetor $\vec{k}$ pela normal a superfície.

Exemplos de Bordos de Superfícies

Orientação de Superfícies

As superfícies são orientadas segundo a regra do "saca-rolha": para que o saca-rolha avance no sentido de $\vec{n}$ é necessário que seu cabo gire no sentido de $\vec{T}$.

Teorema de Stokes

Seja S uma superfície regular orientada, cujo bordo C é uma curva regular simples e fechada, orientada conforme a observação acima. Seja $F = (L, M, N)$ um campo vetorial tal que L, M, N têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um aberto $\Omega \supset S$. Então vale:

$$(2) \qquad \iint_S RotF \cdot \vec{n}\, dS = \int_C F \cdot \vec{T}\, ds \ ,$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal escolhido para S, e $\vec{T}$ o vetor tangente a C, cujo sentido é compatível com o de $\vec{n}$.

Observemos ainda que (2) pode ser posta na forma:

$$(3) \qquad \int_C Ldx + Mdy + Ndz \ =$$

$$= \iint_S (N_y - M_z)dydz + (L_z - N_x)dzdx + (M_x - L_y)dxdy.$$

<u>Observações:</u>

i) O teorema permite transformar a integral de superfície sobre S em integral de linha sobre o bordo C de S, e reciprocamente.

ii) Nas hipóteses do teorema de Stokes, se S é uma superfície fechada, formada por duas superfícies regulares, temos (4) $\iint_S rotF \cdot \vec{n}\, dS = 0$, onde $\vec{n}$ é o normal exterior ou interior.

<u>Exemplos</u>

(1) Calcular $\int_C xz\, dx + \ yseny\, dy - x^2 y\, dz$, onde C é a curva $C: \ P(t) = (2\cos t, 2sent, 2\cos t), \ t \in [0, 2\pi]$.

(2) Verifique o teorema de Stokes para $\iint_S rotF \cdot \vec{n}\, dS$ onde $F = (y, \ 0, \ x + y)$ e $S: z = z(x, y) = 2 - x^2 - y^2$, com $x^2 + y^2 \leq 1$, e $\vec{n}$ aponta “para cima”.

EXERCÍCIOS

1) Dado o subconjunto D, no plano xy, determine E, no plano $r\theta$, tal que $T(E) = D$. Onde T é a transformação de coordenadas polares à coordenadas cartesianas. Desenhe D e E, nos casos:

a) $D:\ 0 \le x \le y^2$;

b) $D:\ x^2 \le y,\ \ 0 \le y \le x$;

c) $D:\ x^2 + y^2 \le 4x,\ \ x \ge 2$;

d) $D:\ x^2 + y^2 \ge 4,\ \ 0 \le x \le 2,\ \ y^2 \le 4$;

e) $D:\ x^2 + y^2 \le 2y,\ \ y \ge x$;

f) $D:\ 1 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le x$.

2) Dado o conjunto D no espaço xyz, achar E no espaço rθz, tal que $T(E) = D$, onde T é a transformação de coordenadas cilíndricas à coordenadas cartesianas. Desenhe D e E, nos casos:

a) $D:\ \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

b) $D:\ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2};\ \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4$;

c) $D:\ 0 \le z \le x^2 + y^2;\ \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4$;

d) $D:\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2};\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ 0 \le z \le 4$;

e) $D:\ 4 \ge x^2 + y^2;\ x \ge 0;\ y \le 0;\ 0 \le z \le 4$;

f) $D:\ x^2 + y^2 \le 2y;\ 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

g) $D:\ 2y \le x^2 + y^2 \le 4y;\ \ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) Dado o conjunto D no espaço xyz, achar E no espaço $r\theta\phi$, tal que $T(E)=D$, onde T é a transformação de coordenadas esféricas à coordenadas cartesianas. Desenhe D e E, nos casos:

a) $D:\ 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4$;

b) $D:\ 3 \le z \le \sqrt{25-x^2-y^2}$;

c) $D:\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$;

d) $D:\ x^2+y^2+z^2 \le 1;\ \ x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$.

4) Faça um esboço das curvas de equações paramétricas dadas, obtenha as respectivas equações cartesianas, indique a orientação das curvas com referência a valores crescentes dos parâmetros. Onde não houver especificação entende-se que o parâmetro assume todos os valores reais.

a) $x=1-3t,\ \ y=1+2t$;

b) $x=2+5\cos t,\ \ y=1-3\cos t$;

c) $x=t^2-1,\ \ y=3t^2+2$;

d) $x=3+\cos t,\ \ y=2+sent,\ \ 0\le t\le 2\pi$;

e) $x=2\cos t,\ \ y=2sent,\ \ z=2\cos t;\ \ 0\le t\le 2\pi$.

5) Considere a curva C obtida como intersecção das superfícies dadas. Pede-se: encontre uma parametrização da curva C; determine uma equação da reta tangente no ponto indicado; faça um esboço das superfícies destacando a curva C, nos casos:

a) Superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=4-2x-4y$. Ponto $(2,-2,8)$.

b) Superfícies $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ e $x^2+y^2=x$. Ponto $(1,0,0)$.

c) Superfícies $4=x^2+y^2$ e $z=x$. Ponto $(2,0,2)$.

d) Superfícies $z=y^2-x^2$ e $x^2+y^2=1$. Ponto $(1,0,-1)$.

6) Calcular a integral da função *f(x,y)* = *xy* no domínio *D* formado pelos pontos $(x,y)\in R^2$ tais que $0\le x\le 1$ e $0\le y\le x^2$, integrando primeiro em relação a x e depois em relação à y. Calcule a mesma integral invertendo a ordem de integração.

7) Esboce a região *D* de integração e exprima a integral como uma integral dupla equivalente, com ordem de integração inversa, nos casos:

a) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx$; b) $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$;

c) $\int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$.

8) Calcular a integral da função *f(x,y)* = $y+2x$ no domínio *D* limitado pelas retas $x=-2$, $x=1$, $y=5$ e pela parábola $y=x^2-4$ (esboce D). De modo análogo ao exercício, acima, exprima a integral obtida com ordem de integração inversa, e calcule-a.

9) Calcule o volume do sólido R, no primeiro octante, limitado pelo plano $x=2$ e pela superfície cilíndrica $z=4-y^2$.

10) Calcular o volume do sólido R, no primeiro octante, limitado pelo plano $x = y$ e pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$.

11) Calcule a integral $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$ onde $D:\ x^2 + y^2 \le 1$.

12) Calcular o volume do sólido R abaixo da superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, acima do plano $z = 0$, exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

13) Use integrais triplas para calcular o volume do sólido limitado pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 12 - x^2 - 3y^2$ integrando: a) 1º em relação a z; b) 1º em relação a y; c) 1º em relação a x.

14) Encontre a massa do sólido no primeiro octante interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. A densidade de volume varia com a distância ao plano xy e é medida em $\frac{Kg}{m^3}$.

15) Encontre o momento de inércia, em relação ao eixo z, do sólido homogêneo (densidade constante) interior ao cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$, abaixo do cone $x^2 + y^2 = z^2$ e acima do plano xy.

16) Dar o volume do sólido limitado pela superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e pela superfície $z = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$.

17) Verificar se o campo vetorial dado é conservativo. Em caso afirmativo, determinar uma função potencial para o campo

i) $F(x,y,z)=\left(3y, -x, yz^2\right)$;

ii) $F(x,y,z)=(y^2 \cos x)\,\vec{i}+(2y \operatorname{sen} x+e^{2z})\,\vec{j}+(2y\,e^{2z})\,\vec{k}$;

iii) $F(x,y,z)=(\,yz+2,\ xz+1,\ xy+2z\,)$.

18) Calcule o trabalho realizado pela força $F(x,y,z)=(y^2 \cos x)\,\vec{i}+(2y \operatorname{sen} x+e^{2z})\,\vec{j}+ \quad +(2y\,e^{2z})\,\vec{k}$, ao mover um partícula ao longo da curva $C: P(t)=(\operatorname{sen} t, \cos t, t),\ t\in[0,2\pi]$.

19) Determine o trabalho realizado pela força $F(x,y)=\left(e^{\operatorname{sen} x}-\dfrac{y^3}{3}, \dfrac{x^3}{3}+e^y\right)$ quando seu ponto de aplicação desloca-se ao longo da curva $C: P(t)=(\,\cos t,\ \operatorname{sen} t),\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ do ponto $(0,-1)$ até o ponto $(0,1)$ no sentido anti-horário.

20) Calcular o trabalho realizado pela força $\vec{F}=y\,\vec{i}+2\,\vec{j}+x\vec{k}$ ao mover uma partícula ao longo da curva C, obtida como intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2=16$ com o plano $z=\left(\sqrt{3}\right)y$ orientada no sentido anti-horário.

21) Calcular a integral de linha da forma diferencial $-y\,dx+x\,dy$ sobre a curva C, orientada no sentido anti-horário, obtida como intersecção das superfícies $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ e $x^2+y^2=2y$.

22) Mostre que o campo vetorial associado a forma diferencial dada é conservativo, encontre uma função potencial e calcule a integral pedida para:

i) $\int_C \left(2xy^2 - y^3\right)dx + \left(2x^2y - 3xy^2 + 2\right)dy$; C é uma curva qualquer ligando $A = (-3,-1)$ e $B = (1,2)$.

ii) $\int_C (\text{seny}\,\text{senhx} + \cos y \cosh x)dx + (\cos y \cosh x - \text{seny}\,\text{senhx})dy$; C é uma curva qualquer ligando $A = (1, 0)$ e $B = (2, \pi)$.

iii) $\int_C \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\,dy + \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dz$, C é uma curva qualquer ligando $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 2, 3)$.

23) Use o Teorema de Green para calcular as integrais dadas:

a) $\int_C [sen(xy) + xy\cos(xy)]\,dx + x^2\cos(xy)dy$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

b) $\int_\gamma \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$, para γ sendo uma curva simples, regular, fechada, orientada no sentido anti-horário, contendo a origem em seu interior.

c) $\int_C 5\,xy\,dx + x^3\,dy$, C é a curva fechada que consiste dos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x,\ 0 \le x \le 2$.

d) $\int_\gamma (2x\cos y)\, dx + (7xy\text{-}x^2 seny)dy$, para γ sendo o gráfico de $y = \cos x$, $\frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ percorrido de $(\frac{-\pi}{2},0)$ até $(\frac{\pi}{2},0)$.

e) $\int_C \left[e^{sen\, x} - \frac{y^3}{3} \right] dx + \left[\frac{x^3}{3} + e^y \right] dy$, com a curva C tendo a parametrização $P(t) = (\cos t,\ \text{sen t})$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

24) Represente geometricamente a superficie S ache uma função com seu respectivo domínio de modo que a superfície S seja o gráfico dessa função; calcule a área da superfície S para:

a) Parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
b) Parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
c) Parte da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

25) Calcule $\iint_S f(x,y,z)dS$ sendo:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 1$.
b) $f(x,y,z) = x$; S: $z^2 = x^2 + y^2$, $1 \le z \le 3$.

c) $f(x,y,z) = x^2 z;$ $\qquad S: z^2 = x^2 + y^2,\ \ 1 \le z \le 4.$

26) Em cada exercício abaixo você usará o Teorema da Divergência, diga, justificando, se o sólido que aparece em cada um deles é simples:

a) Calcule $\iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$ onde $F(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)$ e S é a fronteira do sólido R: $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le 3$.

b) Considere o sólido R abaixo do cone $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}$ acima do plano $z = 0$, exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$. Calcule a integral de superfície $I = \iint_S \vec{F}.\vec{n}dS$ onde $S = \partial R$, $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$, $\vec{n}$ é o vetor normal exterior a S.

c) Calcule $\iint_S (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $\vec{n} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k}$ é sua normal externa.

27) Em cada um dos exercícios abaixo faça um esboço da superfície S indicando a orientação do vetor normal unitário $\vec{n}$, e a orientação do bordo de S, compatível com a orientação de $\vec{n}$, de modo a poder utilizar o teorema de Stokes para resolver:

a) $\int_C x^2dx + 2xydy + xzdz$, onde C é a curva obtida da intersecção da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ no primeiro octante com os planos coordenados xy, xz e yz, C orientada no sentido anti-horário.

b) $I = \iint_S rot\vec{F}.\vec{n}dS$ onde $F(x,y,z) = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$, $\vec{n}$ é o vetor normal unitário exterior à S, S é parte do cone dada por $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$.

28) Calcule o trabalho W realizado pela força $\vec{F} = -2y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$ ao mover uma partícula ao longo de C, onde C é a curva orientada no sentido anti-horário obtida como intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 + 2x + 4y$. Resolva também este exercício utilizando a definição de integral de linha.