Revisão – Vetores em R^{n}

Definição O espaço vetorial R^n é o conjunto $R^n := \{ (x_1,...,x_n) \ / \ x_i \in R, \forall i = 1,..,n \ \}$ no qual definimos as operações:

a) Se $\vec{u} = (x_1,...,x_n)$ e $\vec{v} = (y_1,...,y_n)$ estão em R^n temos que $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1,....,x_n + y_n)$;
b) Se $\vec{u} = (x_1,...,x_n) \in R^n$ e $\lambda \in R$ temos que $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x_1,...,\lambda x_n)$

Definição Dados $\vec{u} = (x_1,...,x_n)$ e $\vec{v} = (y_1,...,y_n)$ elementos quaisquer de R^n dizemos que eles são iguais, e escrevemos $\vec{u} = \vec{v}$, se $x_i = y_i \ , \forall i = 1,...,n$.

Representação Geométrica de Vetores em R^3

Dado um vetor qualquer $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, podemos representá-lo por um segmento orientado cuja origem coincide com a origem do sistema de coordenadas e a extremidade é o ponto (x_1, x_2, x_3):

Definição Se $\vec{u} = (x_1,...,x_n)$ e $\vec{v} = (y_1,...,y_n)$ são vetores em R^n definimos :

a) o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad ;$$

b) a norma ou comprimento de $\vec{u}$ por

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Se $\|\vec{u}\| = 1$ dizemos que $\vec{u}$ é um vetor unitário.

Propriedades do Produto Escalar

Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in R^n$ e $\lambda \in R$ são válidas:

i) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
ii) $\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u}$;
iii) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$;
iv) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{w})$.

Propriedades da Norma

Para quaisquer $\vec{u}, \vec{w} \in R^n$ e $\lambda \in R$ são válidas:

i) $\|\vec{u}\| \geq 0, \quad \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} = (0,...,0)$;
ii) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\overline{u}\|$;
iii) $\|\vec{u}+\vec{w}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{w}\|$ (Propriedade triangular).

Teorema 1 (Desigualdade de Schwarz)

Para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in R^n$ vale $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$.

Note que se $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são diferentes de $\vec{0}$ então $\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\| \neq 0$ e da desigualdade de Schwarz temos que $-1 \leq \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|} \leq 1$, sendo assim, existe um único $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|}$.

Definição Dados $\vec{u}$ e $\vec{w}$ elementos de $R^n - \{\vec{0}\}$ definimos como ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ o único $\theta \in [0,\pi]$ para o qual vale $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|}$. Denotamos $\angle(\vec{u},\vec{w}) = \theta$

Teorema Para quaisquer $\vec{u}, \vec{w} \in R^n - \{\vec{0}\}$ temos que $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w}$ se e somente se $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$.

Definição Se $P = (x_1,\ldots,x_n)$ e $Q = (y_1,\ldots,y_n)$ são pontos quaisquer de R^n, definimos a distância entre P e Q como sendo a norma do vetor $P - Q$:

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots. + (x_n - y_n)^2} \ .$$

Propriedades da Distância

Sendo P,Q e R pontos de R^n são válidas:

i) $d(P,Q) \geq 0$, $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P \equiv Q$;

ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$;

iii) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$.

Teorema 3 Se $P=(x_1,...,x_n)$ e $Q=(y_1,...,y_n)$ temos para todo $i\in\{1,2,...,n\}$:

a) $|x_i - y_i| \le d(P,Q) = \| P-Q \|$;

b) $\| P-Q \| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

Definição Um conjunto L, de pontos de R^n, é uma reta se existirem um ponto $P_0 \in R^n$ e um vetor não nulo $\vec{u}$ tal que $L=\{P_0 + t\vec{u}\ ,\ t\in R\}$.

Isto é, $P\in L \Leftrightarrow \exists t\in R$ tal que $P=P_0+t\vec{u}$.

A equação $P=P_0+t\vec{u}$ é chamada de equação vetorial da reta que passa por P_0 e tem direção $\vec{u}$.

Observação Se $t\in[0,1]$ a equação $P(t)=P+t(Q-P)$ define o segmento fechado contido em R^n**,** com extremos P **e** Q**.** Analogamente definimos segmentos abertos ($t\in(0,1)$), segmentos semi-abertos ($t\in[0,1)$ ou $t\in(0,1]$)**.**

Notações: $[P,Q]$ denota o segmento fechado;

(P,Q) denota o segmento aberto.

Se na equação $P=P_0+t\vec{u}$ **,** $t\in R$ tivermos $P_0=(x_0,y_0,z_0)$**,** $P=(x,y,z)$ e $\vec{u}=(a,b,c)$ então as equações paramétricas da reta são :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \\ z = z_0 + t\,c \qquad , t \in R \end{cases}$$

Observação O mesmo pode ser feito para uma reta qualquer contida em R^n ($x_i = x_i^0 + t\,a_i$, $t \in R$ $\quad i = 1,2,..,n$**;** onde $P = (x_1,...,x_n)$ **,** $P_0 = (x_1^0,....,x_n^0)$ **e** $\vec{u} = (a_1,...,a_n)$ **).**

Definição Um conjunto Π, de pontos de R^3, é um plano se e somente se existem um ponto $P_0 \in R^3$ e dois vetores L.I. de R^3, $\vec{u}$ e $\vec{w}$, de modo que $\Pi = \{ P \in R^3 \,/\, P = P_0 + t\,\vec{u} + s\,\vec{w};\ t, s \in R \}$.

Isto é, $P \in \Pi \Leftrightarrow$ Existem t_1 e $s_1 \in R$ tais que $P = P_0 + t_1\,\vec{u} + s_1\,\vec{w}$

A equação $P = P_0 + t\,\vec{u} + s\,\vec{w}$; $t, s \in R$ é chamada de equação vetorial do plano. Se $P = (x, y, z)$, $\boldsymbol{P_0} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ então temos

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,u_1 + s\,w_1 \\ y = y_0 + t\,u_2 + s\,w_2 \\ z = z_0 + t\,u_3 + s\,w_3 \quad ; \qquad t, s \in R. \end{cases}$$

Estas são chamadas Equações Paramétricas do plano.

Definição O Hiperplano de R^n, que contém $P_0 \in R^n$ e é perpendicular ao vetor não nulo $\vec{n}$, é o conjunto $\Pi = \left\{ P \in R^n \middle/ (P - P_0) \cdot \vec{n} = 0 \right\}$.

Note que se $n = 2$ então Π é uma reta e se $n = 3$ então Π é um plano. Assim a definição de Hiperplano contém, como caso particular, as definições de reta e plano.

Definição Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores de R^3, definimos o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{w}$ por

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + $$

$$+ (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}.$$

Teorema Se θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$ então temos que $\|\vec{u} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{w}\| \, sen\,\theta$.

Definição O produto misto de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é o seguinte numero real $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta$ onde θ é o ângulo entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Geometricamente $\left| \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} \right|$ é o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Superfícies

Falaremos brevemente de superfícies, diremos o essencial e intuitivo uma vez que tal conceito é, em geral, estudado formalmente na disciplina Geometria Diferencial.

Assim é que uma superfície será dada por uma "lei de geração" ou ainda como sendo os pontos do espaço que obedecem a uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$.

O plano (visto como um Hiperplano de R^3) que passa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e é perpendicular ao vetor não nulo $\vec{u} = (a, b, c)$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ para os quais $0 = (P - P_0) \cdot \vec{u} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) =$ $= ax + by + cz + d = F(x, y, z)$, onde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Assim, o plano é uma superfície chamada Superfície Plana.

Daremos agora algumas superfícies por meio de lei de geração encontrando, a seguir, suas equações.

<u>Definição</u> Dados um ponto $P_0 \in R^3$ e um número real $r > 0$, a superfície esférica S de centro P_0 e raio r é o lugar geométrico dos pontos de R^3 que distam r do ponto P_0, isto é, $S = \left\{ P \in R^3 \ / \ d(P, P_0) = r \right\}$.

<u>Exemplo</u> Encontre a equação da superfície esférica que dista 2 unidades do ponto fixo $P_0 = (-1, 2, 0)$.

Em geral temos que a equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

é a equação de uma superfície esférica de centro (x_0, y_0, z_0) e raio $r > 0$.

Definição Um subconjunto $S \subset R^3$ é uma superfície cilíndrica se existirem uma curva C e uma reta r tais que S é a reunião de todas as retas paralelas à r que passam por algum ponto de C. Chamamos C de diretriz e as retas paralelas à r são chamadas geratrizes de S.

Exemplo Desenhe e ache a equação da superfície cilíndrica definida pela curva $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e pela reta

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda; \quad \lambda \in R \end{cases}$$

Definição Um subconjunto $S \subset R^3$ é uma superfície cônica, se existirem uma curva C e um ponto $V \notin C$ tais que S é a reunião das retas que passam por V e Q, onde $Q \in C$.

Observação A curva C é a diretriz, o ponto V é o vértice e cada reta contendo V e passando por C é uma geratriz de S.

Exemplo Dados a curva $C:\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ y=1 \end{cases}$ e o ponto $V=(0,0,0)$, encontre a equação da superfície cônica, S, determinada por C e V. Desenhe S.

Exercícios 1) Esboce as seguinte superfícies cilíndricas: i) $x^2+z^2=1$; ii) $z=x^2$; iii) $y^2-z^2=1$.

2) Considere $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$ e $V=(0,0,a)$, $a>0$, dê a equação e desenhe o cone determinado por C e V.

3) Trace um esboço do plano $x+y+z-1=0$.

Superfícies Quádricas

Uma Superfície Quádrica é o lugar geométrico de uma equação da forma

$$(I)\ F(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+ \\ +a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}=0,$$

onde $a_i \in R$, $\forall i \in \{1,2,...,10\}$ e pelo menos um dentre $a_1,a_2,...,a_6$ é não nulo.

Uma equação do tipo (I) acima pode ser simplificada por rotações e translações.

Faremos o estudo de alguns casos particulares da equação (I).

1) <u>Elipsóide</u> O lugar geométrico de uma equação da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, onde $a,b,c \in R^*$ é a superfície quádrica conhecida como Elipsóide.

Observe que no caso particular em que $a=b=c$ temos a superfície esférica. Observe, ainda, que a intersecção do Elipsóide com os planos coordenados são elipses (circunferências quando $a=b=c$).

Um esboço geral de sua forma geométrica é:

2) <u>Parabolóide Elíptico</u> O lugar geométrico de uma equação da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, onde $a,b,c \in R^*$, é a superfície quádrica conhecida como Parabolóide Elíptico.

No caso particular em que $a=b$ temos o Parabolóide Circular. Observe que a intersecção do Parabolóide Elíptico com os planos coordenados xz e yz são parábolas; já com planos paralelos ao plano xy são elipses (quando $a \neq b$), circunferências (quando $a=b$) um único ponto ou o conjunto vazio.

Um esboço geral de sua forma geométrica é:

3) Cone Elíptico O lugar geométrico de uma equação da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, onde $a,b,c\in R^*$, é a superfície quádrica conhecida como Cone Elíptico.

No caso particular em que $a=b$ temos o Cone Circular. Observe que a intersecção do Cone Elíptico com os planos coordenados xz e yz são pares de retas; já com o plano xy um ponto.

Um esboço geral de sua forma geométrica é:

4) Hiperbolóide de Uma Folha O lugar geométrico de uma equação da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, onde $a,b,c\in R^*$, é a superfície quádrica conhecida como Hiperbolóide de Uma Folha.

Observe que a intersecção de tal Hiperbolóide com planos paralelos ao plano xy são elipses (circunferências quando $a=b$) e com planos paralelos aos planos xz e yz são hipérboles.

Um esboço geral de sua forma geométrica é:

5) <u>Hiperbolóide de Duas Folha</u> O lugar geométrico de uma equação da forma $\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$, onde $a,b,c \in R^*$, é a superfície quádrica conhecida como Hiperbolóide de Duas Folha.

Observe que a intersecção de tal Hiperbolóide de Duas Folha com os planos coordenados xz e yz são hipérboles já com os planos $z = k$ onde $|k| > |a|$ são elipses (circunferências quando $c = b$).

Um esboço geral de sua forma geométrica é:

6) <u>Parabolóide Hiperbólico</u> O lugar geométrico de uma equação da forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$, onde $a,b,c \in R^*$, é a superfície quádrica conhecida como Parabolóide Hiperbólico.

Observe que a intersecção de tal Parabolóide Hiperbólico com os planos coordenados xz e yz são parábolas já com os planos $z = k$, $k \neq 0$ são hipérboles (para $z = 0$ duas retas).

Um esboço geral de sua forma geométrica é:

Alguns Subconjuntos de R^n

Definição Um subconjunto $A \subset R^n$ é convexo se para qualquer par de pontos P, Q de A, o segmento $[P,Q]$ está inteiramente contido em A.

Propriedades i) $\varnothing$ é convexo;

ii) Todo intervalo da reta é convexo;

iii) A reunião de convexos pode não ser convexo;

iv) R^n é convexo;

v) A intersecção de convexos é convexo.

Definição Se $P_0 \in R^n$, $r > 0$ então a Bola aberta de centro P_0 e raio r, denotada por $B_r(P_0)$, é definida por $B_r(P_0) = \{ P \in R^n \,/\, \|P - P_0\| < r \}$.

Observações: Se $n = 1$, $B_r(P_0)$ é o intervalo aberto $(P_0 - r, P_0 + r)$;

Se $n = 2$, $B_r(P_0)$ é o interior de uma círcunferência com centro em P_0 e raio r;

Se $n = 3$, $B_r(P_0)$ é o interior da superfície esférica com centro P_0 e raio r.

<u>Definição</u> Se $P_0 \in R^n$, $r > 0$ então a Bola fechada (ou Disco de centro P_0 e raio r), denotada $D_r(P_0)$, é definida por $D_r(P_0) = \{ P \in R^n \,/\, \|P - P_0\| \leq r \}$.

<u>Definição</u> Uma Bola (aberta ou fechada) Perfurada é uma bola (aberta ou fechada) menos o seu centro.

<u>Notação:</u> $B_r^{\,*}(P_0)$, $D_r^{\,*}(P_0)$.

<u>Definição</u> Se $A \subset R^n$ e $P \in A$ então P é dito ser um ponto interior de A se existir $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset A$.

<u>Notação:</u> Dado $A \subset R^n$ denotaremos seu interior por $\overset{\circ}{A} = \operatorname{int} A$.

<u>Definição</u> Um conjunto $A \subset R^n$ é aberto se todos seus pontos são interiores.

<u>Definição</u> Um conjunto $F \subset R^n$ é fechado se $R^n - F = F^c$ (complementar de F em R^n) é aberto.

<u>Observações</u> i) Existem conjuntos que não são abertos nem fechados;
ii) Existem conjuntos que são abertos e fechados ao mesmo tempo.

<u>Definição</u> $A \subset R^n$ é limitado se existir $r > 0$ tal que $A \subset B_r(P_0)$, onde $P_0 = 0 = (0,..,0)$ é a origem de R^n.

<u>Definição</u> $K \subset R^n$ é compacto se for fechado e limitado.

Definição Um subconjunto $D \subset R^n$ é conexo por caminhos se dados quaisquer dois pontos de D existir uma curva, ligando tais pontos, inteiramente contida em D.

Podemos falar com abuso de linguagem que um conjunto é conexo se tem um só “pedaço”.

Definição Dizemos que $D \subset R^n$ é um domínio se D for aberto e conexo.

Definição Sejam $A \subset R^n$ e $P \in R^n$. Dizemos que P é ponto de acumulação de A se para todo $r > 0$ temos que $B_r^{*}(P) \cap A \neq \varnothing$.

Observações: i) Denotamos por A' o conjunto de todos os pontos de acumulação de A; ele é chamado derivado;
ii) Um ponto de acumulação de A pode não pertencer a A como é o caso de $P = 0$ para o conjunto $A = (0, 1) \subset R$;
iii) Um ponto do conjunto pode não ser de acumulação para esse conjunto como é o caso de $P = 0$ para o conjunto $A = \{0\} \cup (1, 2) \subset R$.

Definição Dado $A \subset R^n$, a aderência (ou fecho) de A é o conjunto $\overline{A} = A \cup A'$.

Observação Para qualquer $A \subset R^n$, $\overline{A}$ é o “menor” conjunto fechado que contém A, isto é, se $F \subset R^n$ é fechado e $A \subset F$ então $\overline{A} \subset F$.

<u>Definição</u> Dado $A \subset R^n$ chamamos de fronteira de A, e denotamos ∂A, ao conjunto dos pontos $P \in R^n$ tal que é válido: $B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset$ e $B_\varepsilon(P) \cap A^c \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$.

<u>Funções Vetoriais</u>

Se $P = P_0 + t\vec{u}$, $t \in R$ é a equação de uma reta passando por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ com direção $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ então a cada $t \in R$ corresponde um ponto $P(t) \in R^3$. Assim, podemos pensar em P como uma função que tem como domínio o conjunto R e como imagem a reta determinada por P_0 e $\vec{u}$ em R^3. Uma vez que R^3 é um espaço vetorial podemos pensar $P(t)$ como um vetor, para todo $t \in R$.

<u>Definição</u> Uma Função Vetorial é uma função cuja imagem é um conjunto de vetores.

Se denotarmos $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ na equação vetorial da reta obtemos suas equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t\,u_1 \\ y(t) = y_0 + t\,u_2 \;, \qquad t \in R. \\ z(t) = z_0 + t\,u_3 \end{cases}$$

<u>Funções Vetoriais de uma variável real em R^n</u>

<u>Definição</u> Uma função vetorial de uma variável real em R^n é uma função definida em um subconjunto de R com imagem no espaço vetorial R^n.

<u>Notações:</u> Algumas vezes utilizaremos um abuso de notação indicando a função vetorial P por $P(t)$. Se P é uma função vetorial em R^n denotaremos: D_P =domínio de P, contido em R; $C_P =$ imagem de P, contida em R^n, escrevemos então $P : D_P \subset R \to R^n$.

Uma vez que $t \in D_P \subset R$ e $P(t) \in R^n$ podemos indicar $P(t) = (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$ onde, para cada $i = 1,..., n$, temos que $x_i : D_P \subset R \to R$. Assim, uma função vetorial em R^n determina n funções reais de uma variável real.

<u>Exemplo</u> Desenhe a imagem, C_P, onde $P(t) = (\ 1 + t, 1 - t\ ),\ t \in R$.

<u>Limite e Continuidade de Funções Vetoriais</u>

Seja $P(t) = (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$ uma função vetorial em R^n, com $t \in D_P$; t_0 um ponto de acumulação de D_P.

<u>Definição</u> Diremos que $P_0 = (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0)$ é o limite de $P(t)$ quando t tende a t_0 se para cada $i \in \{1,2...,n\}$ tivermos $\lim\limits_{t \to t_0} x_i(t) = x_i^0$ e escrevemos $\lim\limits_{t \to t_0} P(t) = P_0$.

<u>Definição</u> Dizemos que P é contínua em $t_0 \in D_P$ se $\lim\limits_{t \to t_0} P(t) = P(t_0)$.

<u>Definição</u> Dizemos que P é contínua em $A \subset D_P$ se P é contínua em todo $t \in A$.

<u>Observação</u> Se $P(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ então $P(t)$ é contínua se e somente se $x_i(t)$ é contínua para todo $i \in \{1,2...,n\}$.

<u>Exemplos</u> Estude o limite e a continuidade das funções vetoriais dadas nos pontos indicados nos casos:

i) $P(t) = \left(\ln(1+t), \sqrt{1+t^2}, t\right)$ em $t_0 = 0$.

ii) $P(t) = \left(\dfrac{t^2-4}{t-2}, \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}, 3\right)$ em $t_0 = 0$ e $t_0 = 2$.

iii) $P(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ em $t_0 \in R$.

<u>Curvas – Equações Paramétricas</u>

<u>Definição</u> Uma curva em R^n é a imagem $C_P \subset R^n$ de uma função vetorial P que é contínua e tem como domínio D_P um intervalo da reta R.

Isto é, uma curva em R^n é a imagem de uma função contínua $P(t) = (x_1(t), x_2(t),...,x_n(t))$, $t \in I$, I intervalo.

O vetor $P(t)$ é chamado de vetor posição e varia quando t percorre I.

A equação $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)),\ \ t \in I$ é chamada uma parametrização de C_P.

Já as equações $x_1 = x_1(t);\ x_2 = x_2(t); ...; x_n = x_n(t)$ são as equações paramétricas de C_P, nas quais t é o parâmetro.

Notemos que a mesma curva pode ter várias parametrizações como pode ser visto com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, esta pode ser descrita pelas parametrizações:
i) $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ \ t \in [0, 2\pi]$;
ii) $P(t) = (\cos 2\pi t\ ,\ sen 2\pi t),\ \ t \in [0,1]$

Em R^2 uma curva tem as equações paramétricas $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$. Eliminando-se t nas equações acima obtemos uma equação em x e y, chamada de equação cartesiana da curva.

Em geral, o conjunto de pontos que satisfazem a equação cartesiana contém (às vezes propriamente) a curva em questão.

<u>Exemplo1</u> Para $P(t) = (2\operatorname{sen} t, \cos t),\ \ t \in [0, \pi]$.

<u>Exemplo 2</u> Para $P(t) = (\sqrt{t}, t),\ \ t \geq 0$.

<u>Notação</u> Uma função vetorial P também pode ser representada na forma $P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, onde $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é a base canônica do espaço R^2, isto é, $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$.

Em R^3 representamos uma curva pelas equações paramétricas $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ t \in I$. Analogamente "podemos" eliminar t nas equações acima, obtendo agora duas equações em x, y, z chamadas equações cartesianas de C_P. Cada equação cartesiana representa uma "superfície" e C_P é a intersecção das duas (ou está contida nessa intersecção).

Notação: Também podemos representar $C_P \subset R^3$ pela equação $P(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in I$ onde $\left\{\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,\right\}$ é a base canônica em R^3.

Exemplos Descrever, geometricamente, a curva dada nos casos:

i) $P(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$ onde a) $t \in [0, \pi]$; b) $t \in [0, 2\pi]$.

ii) $P(t) = \left(sent\,,\, sent\,,\, \cos t\,\right)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

iii) $P(t) = (\operatorname{sen} t)\vec{i} + (\cos^2 t)\,\vec{j}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

iv) $x = t$; $y = \cos t$; $z = \operatorname{sen} t$, $t \in [0, 4\pi]$.

v) $P(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in R$.

vi) $P(t) = (\,\cos t,\, \operatorname{sen} t,\, 1)$, $t \in R$.

vii) $P(t) = \left(e^{-t}\cos t\,,\, e^{-t} sent\,,\, e^{-t}\,\right)$, $t \geq 0$.

Derivada de uma Função Vetorial

Definição Se P é uma função vetorial em R^n definimos a derivada de P em t, que denotamos $P'(t)$, por $P'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{P(t+h) - P(t)}{h}$, quando tal limite existe.

Assim, P' pode ser pensada como uma função vetorial cujo domínio é o conjunto dos $t \in D_P$ para os quais tal limite existe.

Teorema Se $P(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ então teremos $P'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), ..., x'_n(t))$, e o domínio de P' é a intersecção dos domínios de x'_1, x'_2,..., x'_n.

Observação Assim, $P'(t)$ existe se existe $x'_i(t)$ para cada $i \in \{1,2,...,n\}$.

Exemplos: Determinar $P'(t)$ para:

i) $P(t) = (\text{sen}\, 3t,\ \cos^2 2t)$;

ii) $P(t) = (e^t \cos t,\ \ln t^2,\ t^5,\ 2\,\text{sen}\, t)$.

Teorema Se $P(t)$ é derivável então $P(t)$ é contínua.

Interpretação Geométrica – Tangência

Seja $P: D_P \subset R \to R^n$, C_P a curva em R^n descrita por P.

A direção do vetor $P(t+h) - P(t)$ é a mesma do vetor $\frac{1}{h}[P(t+h) - P(t)]$.

Se existe $P'(t)$ a direção de $\frac{1}{h}[P(t+h) - P(t)]$ aproxima-se da direção de $P'(t)$, pois $P'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}$. Simultaneamente, neste processo, $P(t+h) \to P(t)$.

Assim, quando existe e é não nulo, $P'(t)$ é o vetor tangente à curva C_P no ponto $P(t)$.

A reta determinada por $P(t)$ e $P'(t)$ é chamada de reta tangente à C_P no ponto $P(t)$ e é dada por $L = \{P(t) + \lambda P'(t) \,/\, \lambda \in R\}$.

Quando $P'(t) = \vec{0}$ o vetor tangente não é definido.

Exemplos:

i) O gráfico de uma função real contínua f pode ser visto como a imagem da seguinte função vetorial $P: D_f \to R^2 \,/\, P(x) = (x, f(x))$.

ii) Encontre a equação da reta tangente à curva C_P, para a qual $P(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ em $t_0 = \pi$.

iii) Encontre a equação da reta tangente à curva C_P, para a qual $P(t) = (\cos t, sen t, sen t)$, $t \in [0, 2\pi]$, no ponto $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Regras de Derivação

Sejam P e Q funções vetoriais em R^3, $\phi : D_\phi \subset R \to R$, $\lambda \in R$.

Definições: Em $D_P \cap D_Q$ definimos

a) $(P \pm Q)(t) = P(t) \pm Q(t)$;
b) $(P \cdot Q)(t) = P(t) \cdot Q(t) \in R$;
c) $(P \wedge Q)(t) = P(t) \wedge Q(t) \in R^3$.

Em D_P definimos :

d) $(\lambda P)(t) = \lambda P(t)$, $\lambda \in R$.

Em $D_\phi \cap D_P$ definimos:

e) $(\phi P)(t) = \phi(t) P(t)$.

Teorema Se P, Q, ϕ são deriváveis em t, então λP, $P \pm Q$, ϕP, $P \cdot Q$, $P \wedge Q$ também o são e valem:
i) $(P \pm Q)'(t) = P'(t) \pm Q'(t)$;
ii) $(\lambda P)'(t) = \lambda P'(t)$;
iii) $(P \cdot Q)'(t) = P'(t) \cdot Q(t) + P(t) \cdot Q'(t)$;
iv) $(P \wedge Q)'(t) = P'(t) \wedge Q(t) + P(t) \wedge Q'(t)$;
v) $(\phi P)'(t) = \phi'(t) P(t) + \phi(t) P'(t)$.

Observação: Em iv) a ordem é importante pois em geral $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$.

Se P é uma função vetorial derivável cuja imagem descreve o movimento de uma partícula, digamos em R^3, a condição $\|P(t)\| = \text{constante } c$, $c > 0$, impõe que esse movimento se dê sobre uma esfera de raio c e centro na origem. Assim o vetor tangente à curva em um ponto $P(t)$, deve ser tangente á esfera neste ponto, isto é, $P'(t) \perp P(t)$. De fato:

Isto demonstra o seguinte teorema

Teorema Se uma função vetorial P, derivável em I, tem comprimento constante (isto é, $\| P(t) \| = c$, $c =$constante, para todo $t \in I$) então $P'(t) \cdot P(t) = 0$, qualquer que seja $t \in I$.

Definição Se a imagem de P descreve a trajetória de uma partícula então para cada $t \in D_P$ definimos:

$P(t) =$ vetor posição da partícula
$P'(t) =$ vetor velocidade da partícula
$P''(t) =$ vetor aceleração da partícula
$\| P'(t) \| =$ velocidade escalar da partícula
$\| P''(t) \| =$ aceleração escalar da partícula

Reparametrização

Consideremos a função vetorial $P:[a,b]\to R^n$ e seja $\phi:[c,d]\to[a,b]$ bijetiva, com ϕ' continua, $\phi(s)=t$. Nessa situação podemos obter a composta $Q=Po\phi:[c,d]\to R^n$.

Nestas condições dizemos que ϕ é uma mudança de parâmetros e $Q=Po\phi$ é uma reparametrização de C_P. Caso $\|Q'(s)\|=1,\ \forall s\in D_Q$ diremos que Q é uma reparametrização por comprimento de arco da curva C_P.

Comprimento de Arco

Seja C_P uma curva de R^n dada pela função vetorial $P:[a,b]\to R^n$.

Se $\Delta=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ é uma partição de [a,b], isto é, $t_0=a<t_1<t_2<...<t_n=b$ denotamos $\Delta_j t=t_j-t_{j-1}$ o comprimento de $[t_{j-1},t_j]$.

A norma dessa partição é definida por $|\Delta|=\max\{\Delta_j t,\ j=1,...,n\}$.

Indicamos por P o conjunto de todas as partições de [a,b].

A expressão $L_\Delta=\sum_{j=1}^{n}\|P(t_j)-P(t_{j-1})\|$ dá o comprimento da poligonal que passa pelos pontos $P(t_0),P(t_1),...,P(t_n)$, uma vez fixada Δ.

Definição O comprimento de arco da curva C_P de $P(a)$ até $P(b)$ é definido por $\lim\limits_{|\Delta|\to 0} L_\Delta = L(a,b)$, onde Δ varia em P. Desde que o limite exista.

Observação Se L é um número real, dizemos que C_P é uma curva retificável.

Teorema Se P é uma função vetorial derivável com P' contínua em [a,b], o comprimento $L(a,b)$ é dado por $L(a,b) = \int_a^b \| P'(t) \| dt = \int_a^b v(t)dt$.

Observação Se uma curva C é dada como gráfico de uma função $f : [a,b] \to R$, esta com derivada contínua em [a,b], então o comprimento de C é dado por

$$L(a,b) = \int_a^b \| P'(t) \| \, dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt,$$

onde $P(t) = (t, f(t))$, $t \in [a,b]$.

Exemplo1 Determinar o comprimento de arco de C_P, nos casos: a) $P(t) = (t^3, 2t^2)$, $t \in [0,2]$; b) $P(t) = (\cos t, sent, t)$, $t \in [0,4\pi]$.

Exercício Na construção de uma bobina, vamos usar um cilindro de raio $r = 2cm$ e altura $h = 20cm$, uma certa quantidade de fio de espessura desprezível, a ser enrolado no cilindro em forma de hélice. Calcular o comprimento total do fio, sabendo que o passo da hélice é $p = 0{,}1cm$, isto é, $z = \frac{0{,}1}{2\pi} t$.

Funções Reais de Várias Variáveis

Definição Uma função real de n variáveis reais é uma função cujo domínio é um subconjunto $A \subset R^n$, com valores reais, escrevemos então $f : A \subset R^n \to R$.

Notações D_f = Domínio de f; $\operatorname{Im} f$ = Imagem de f.

Exemplo $f : R^4 \to R \ / \ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2$. Neste caso $D_f = R^4$ e $\operatorname{Im} f = [0, +\infty)$.

Notação $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Exemplos: 1) Encontre o domínio de:

a) $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}$; b) $f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|}$;

c) $f(x, y) = \dfrac{sen\, x}{1 - x + y}$; d) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$;

e) $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$.

2) Encontre a imagem de: a) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$;

b) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$; c) $f(x, y) = sen\, xy$.

Gráficos de funções de duas variáveis – Curvas de nível

Definição Dada uma função $f: D_f \subset R^n \to R$ o Gráfico de f é o seguinte subconjunto de R^{n+1}: $G_f = \left\{ (x_1,\ldots x_n,\, z) \in R^{n+1} / (x_1,..x_n) \in D_f \;\; e \;\; z = f(x_1,..,x_n) \right\}$.

No caso em que $n \geq 3$, como $G_f \subset R^{n+1}$, não podemos visualizar tal Gráfico. O caso interessante é quando $n = 2$, neste o G_f será, em geral, parte de uma superfície e poderemos fazer uma representação geométrica.

Exemplos Esboce o gráfico de $z = f(x, y)$ para:

i) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, com $D_f : x^2 + y^2 \leq 4$.

ii) $z = x^2 + y^2$, com $D_f : x^2 + y^2 \leq 16$.

iii) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $D_f = R^2$.

iv) $z = \sqrt{4 - y^2}$, com $D_f :\; |x| \leq 2, \;\; |y| \leq 2$.

v) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, com $D_f : x^2 + y^2 \leq 8$.

Um conceito importante que auxilia a traçar o esboço do gráfico de uma função é o de curvas de nível.

Definição A curva de nível C_k, **no plano**, de uma função $z = f(x, y)$, associada ao valor $z = k$ é o subconjunto $C_k = \{ \; (x, y) \in D_f \;\; / \;\; f(x, y) = k \; \}$.

Exemplo Encontre as curvas de nível no plano para $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+y^2$.

Definição A curva de nível **no espaço** de $z=f(x,y)$, denotada também por C_k, é o conjunto:

$C_k=\{\ (x,y,z)\in R^3\ /\ (x,y)\in D_f\ \ e\ \ f(x,y)=z=k\ \}$.

Uma vez que $C_k=G_f\cap(plano\ z=k)$ teremos que o gráfico de f é, então, a reunião das C_k no espaço, isto é, $G_f=\bigcup\limits_{(k\in \operatorname{Im} f)} C_k$.

Exemplos 1) No exemplo anterior tínhamos $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+y^2$. Encontre agora as curvas de nível no espaço para tal função.

2) Use o conceito de curva de nível no espaço para traçar um esboço do gráfico de $z=f(x,y)=9-x^2-y^2$ onde $D_f=\{\ (x,y)\in R^2\ /\ x^2+y^2\le 4\ \}$.

3) Idem para $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$, com $D_f:\ 4\le x^2+y^2\le 9$.

Exercício Encontre as curvas de nível e trace um esboço do gráfico de $z=f(x,y)=x\cdot y$ e de $z=f(x,y)=y^2-x^2$, compare tais gráficos.

Podemos, também, ter funções cuja lei de formação muda conforme seja a parte do domínio que consideramos como é o caso, por exemplo, de $f : R^2 \to R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 & se \;\; x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & se \;\; 1 < x^2 + y^2 \le 4. \\ -\sqrt{x^2 + y^2} & se \;\; x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

Operações com Funções

Sejam $f : D_f \subset R^n \to R$, $g : D_g \subset R^n \to R$ e $\phi : D_\phi \subset R \to R$, temos as seguintes operações:

a) $(f \pm g)(P) = f(P) \pm g(P)$, $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

b) $(f \cdot g)(P) = f(P) \cdot g(P)$, $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

c) $(f/g)(P) = \dfrac{f(P)}{g(P)}$, $D_{f/g} = \{P \in D_f \cap D_g \;/\; g(P) \neq 0\}$

d) $(\phi \circ f)(P) = \phi(f(P))$, $D_{\phi \circ f} = \{P \in D_f \;/\; f(P) \in D_\phi\}$

Limites

Seja $f : D_f \subset R^n \to R$, P_0 um ponto de acumulação de D_f. A notação $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$ tem o significado: $f(P)$ aproxima-se arbitrariamente de L desde que P aproxime-se suficientemente de P_0.

Definição Dizemos que L é o limite de f em P_0 e escrevemos $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$ se e somente se para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(P) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < \| P - P_0 \| < \delta$, $P \in D_f$.

Exemplos Mostre que:

i) $\lim_{(x,y) \to (2,4)} 5x - 3y = -2$;

ii) $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x = x_0$, e que $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} y = y_0$;

iii) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{(x+y)(x+2)}{(x+y)} = 2.$

Teoremas sobre Limites

Teorema Sejam $f : D_f \subset R^n \to R$, $g : D_g \subset R^n \to R$ para as quais $\lim_{P \to P_0} f(P)$ e $\lim_{P \to P_0} g(P)$ existem, $P_0 \in (D_f \cap D_g)'$ então :

a) $\lim_{P \to P_0} (f \pm g)(P) = \lim_{P \to P_0} f(P) \pm \lim_{P \to P_0} g(P)$;

b) $\lim_{P \to P_0} (f \cdot g)(P) = \left(\lim_{P \to P_0} f(P) \right) \cdot \left(\lim_{P \to P_0} g(P) \right)$;

c) $\lim\limits_{P\to P_0} \left(\frac{f}{g}\right)(P) = \left(\dfrac{\lim\limits_{P\to P_0} f(P)}{\lim\limits_{P\to P_0} g(P)} \right)$, desde que tenhamos $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) \neq 0$ e $P_0 \in (D_{f/g})'$.

<u>Exemplo</u> Calcule os limites dados:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 + y^2$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^n$, onde $n \in N$.

<u>Teorema</u> Se $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$ para todo $P \in B_r^*(P_0)$ e se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = \lim\limits_{P\to P_0} h(P) = L$ então $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) = L$.

<u>Teorema</u> Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = 0$ e se $|g(P)| \leq M$, para todo $P \in B_r^*(P_0)$, então $\lim\limits_{P\to P_0} (f \cdot g)(P) = 0$.

<u>Exemplo</u> Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

<u>Teorema</u> Sejam $f : D_f \subset R^n \to R$ com $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L$, $\phi : D_\phi \subset R \to R$ contínua em L. Se $P_0 \in (D_{\phi\circ f})'$ então $\lim\limits_{P\to P_0} (\phi \circ f)(P) = \phi(\lim\limits_{P\to P_0} f(P)) = \phi(L)$.

<u>Exemplo</u> Calcule os limites: a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt[n]{x^2+y^2}$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2)^n$, onde $n \in N$.

<u>Teorema</u>(Conservação de Sinal)

Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L \neq 0$, então existe $B_r^*(P_0)$ na qual $f(P)$ conserva o sinal, isto é:

i) Se $L > 0$, $f(P) > 0$, $\forall P \in (D_f \cap B_r^*(P_0))$;

ii) Se $L < 0$, $f(P) < 0$, $\forall P \in (D_f \cap B_r^*(P_0))$.

<u>Limites Através de Subconjuntos</u>

Seja $f : D_f \subset R^n \to R$, $A \subset R^n$ tal que $A \cap D_f \neq \varnothing$. A restrição de f a $A \cap D_f$, denotada f_A, é a função $f_A : A \cap D_f \subset D_f \to R$ dada por $f_A(P) = f(P)$, $\forall P \in A \cap D_f$.

<u>Definição</u> Se $P_0 \in (A \cap D_f)'$ dizemos que o limite da restrição de f a $A \cap D_f$ é L, quando $P \to P_0$, e denotamos $\lim\limits_{\substack{P\to P_0 \\ P\in A\cap D_f}} f(P) = L$ se $\lim\limits_{P\to P_0} f_A(P) = L$.

Limites ao longo de Curvas

Trataremos agora de um caso particular da situação descrita acima quando tivermos que $A = C_P$ =curva de R^n.

Seja $f : D_f \subset R^n \to R$ e consideremos a função vetorial contínua $P : I \subset R \to R^n$ tal que $P_0 = P(t_0)$ esteja no interior de D_f, com $t_0 \in I$.

Podemos considerar o limite $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in C_P \cap D_f}} f(P) =$
$= \lim\limits_{P \to P_0} f_{C_P}(P) = \lim\limits_{t \to t_0} f(P(t))$ e este depende de uma única variável.

<u>Exemplo</u> Se $z = f(x, y)$ tem $(0,0)$ como ponto interior de D_f consideremos o $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in A \cap D_f}} f(x, y)$ nos casos:

i) $A = \{(x, y) \in R^2 / x = y^3\}$;

ii) $A = \{(x, y) \in R^2 / x = 0\}$.

<u>Teorema</u> Nas condições da definição anterior se P_0 é um ponto de acumulação de D_f então temos que

$L = \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ se e somente se $L = \lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in A \cap D_f}} f(P)$,

para todo $A \subset R^n$, tal que $P_0 \in (A \cap D_f)'$.

Corolário Se existirem subconjuntos A e B de R^n para os quais tenhamos $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in A \cap D_f}} f(P) \neq \lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in B \cap D_f}} f(P)$, onde $P_0 \in (A \cap D_f)'$ e $P_0 \in (B \cap D_f)'$ então não existe $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$.

Observação O corolário acima é útil para se verificar a não existência de um limite.

Exemplos Estude a existência dos limites: a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$.

Continuidade

Sejam $f : D_f \subset R^n \to R$, $P_0 \in D_f \cap (D_f)'$ então temos a seguinte:

Definição Dizemos que f é contínua em P_0 se $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Teorema Se f e g são contínuas em P_0, $P_0 \in (D_f \cap D_g)'$, $\lambda \in R$, então são contínuas em P_0 as funções: a) $f \pm g$; b) $f \cdot g$; c) $\lambda \cdot f$; d) f/g (desde que $g(P_0) \neq 0$); e) Se f é contínua em P_0 e ϕ é contínua em $f(P_0)$ então $\phi \circ f$ é contínua em P_0.

Um polinômio homogêneo em duas variáveis, de grau n, é da forma $P(x,y) = a_n x^n y^0 + a_{n-1} x^{n-1} y^1 + ... + a_0 x^0 y^n$.

Um polinômio em duas variáveis é uma soma finita de polinômios homogêneos em duas variáveis.

Uma função f é dita polinomial se existir um polinômio $p(x,y)$ tal que $f(x,y) = p(x,y)$, $\forall (x,y) \in D_f$.

Uma função f é chamada de racional se é da forma $f(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $\forall (x,y) \in D_f$, onde P e Q são polinômios em duas variáveis.

<u>Observação:</u> Temos definições análogas para polinômios, funções polinomiais e racionais de três ou mais variáveis reais. Para qualquer que seja o número de variáveis é válido o seguinte teorema:

<u>Teorema</u>

i) Uma função polinomial é contínua;

ii) Uma função racional é contínua em seu domínio.

<u>Exemplo 1</u> Discuta a continuidade da função

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \quad , & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

<u>Exemplo 2</u> Determine a região de continuidade da

função $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 \ , & \text{se} \quad x^2+y^2\leq 4 \\ \\ \sqrt{x^2+y^2}+3 \, , & \text{se} \quad x^2+y^2>4 \end{cases}$.

<u>Derivada Direcional – Derivadas Parciais – Gradiente</u>

Se $z=f(x,y)$, não se define em um ponto $P_0\in D_f$ uma única taxa de variação de f. Esta depende da direção segundo a qual P move-se para P_0.

A taxa de variação de f em P_0, na direção de $\vec{u}$ (unitário) é dada por : $D_{\vec{u}}f(P_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(P_0+t\,\vec{u})-f(P_0)}{t}$ e é chamada de Derivada Direcional de f em P_0, na direção do vetor unitário $\vec{u}$.

<u>Notações:</u> $D_{\vec{u}}f(P_0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$; $\nabla_{\vec{u}}f(P_0)$.

<u>Observações</u> Se $f : D_f \subset R^n \to R$, $P_0 \in D_f$ e $\vec{u}$ é um vetor unitário de R^n:

i) A definição é análoga, isto é, $D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t}$;

ii) Se $\phi(t) = f(P_0 + t\vec{u})$ então teremos que $D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \dfrac{\phi(t) - \phi(0)}{t - 0} =$ $= \phi'(0)$.

A observação (ii) nos dá um meio de calcular $D_{\vec{u}} f(P_0)$ utilizando apenas conhecimento de derivadas de funções reais de uma variável real.

<u>Exemplo 1</u> Calcular $D_{\vec{u}} f(P_0)$ onde $P_0 = (x_0, y_0)$; $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ e $\vec{u} = (1,0)$.

<u>Exemplo 2</u> Mostrar que a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \; , & se \;\; (x, y) \neq (0,0) \\ 0 \; , & se \;\; (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

é descontínua em (0,0), porém as derivadas direcionais existem em $P_0 = (0,0)$, para qualquer direção $\vec{u}$ escolhida.

Derivadas Parciais

Seja $f : D_f \subset R^n \to R$, $P_0 \in D_f$. A Derivada Parcial de f em P_0, em relação a j-ésima coordenada, denotada $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$, é dada por $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0) = D_{\vec{e}_j} f(P_0) =$ $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\,\vec{e}_j) - f(P_0)}{t}$, onde $\vec{e}_j = (0,..,0,1,0,...0)$, 1 na j-ésima posição e 0 nas demais.

<u>Notações:</u> $D_{\vec{e}_j} f(P_0)$; $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$; $f_{x_j}(P_0)$.

<u>Observação</u> Se $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, a derivada parcial de f em relação a x_j, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, no ponto $P = (y_1, .., y_n)$ é obtida derivando-se $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ como se toda x_i, $i \neq j$ fosse constante e somente x_j variasse. Após esta operação substituímos x_i por y_i, para todo $i = 1,2,...,n$.

<u>Exemplo</u> Dar as derivada parciais de :

i) $f(x, y) = x^2 + y^2$ em $P_0 = (1,2)$;

ii) $f(x, y, z) = z \cdot e^x \cdot \operatorname{sen} y$ em $P_0 = (0, \pi/2, 1)$.

<u>Definição</u> Dizemos que f é Derivável em P_0 se existem em P_0 todas as derivadas parciais.

Exemplos:

1) Estude a derivabilidade de $f(x,y) = y + x^2$;

2) Estude se é derivável em $P_0 = (0,0)$ a função $f(x,y) = |y| + x^2$.

Definição Seja $f : D_f \subset R^n \to R$, tal que D_f é aberto em R^n, $P_0 \in D_f$ e f é derivável em P_0. O Gradiente de f em P_0, denotado $\nabla f(P_0)$, é o vetor definido por: $\nabla f(P_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \ldots\ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right)$.

Exemplo Calcular $\nabla f(P_0)$ onde $P_0 = (0, \pi/2, 1)$, e $f(x,y,z) = z \cdot e^x \cdot \operatorname{sen} y$.

Derivadas Parciais de Ordem Superior – Teorema de Schwarz

Se $f : D_f \subset R^n \to R$ então $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ pode ser pensada como uma função $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : A \subset D_f \to R$, onde A é definido por $A = \left\{ P \in D_f \ / \ existe \ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(P) \right\}$, caso $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ possua derivadas parciais estas serão chamadas as derivadas parciais de ordem dois de f e assim, sucessivamente e sempre que possível, obtemos as derivadas parciais de ordem três, quatro,... de f.

Notações A n-ésima derivada parcial de f em relação à x_j é denotada $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_j^n}$. Por $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $D_{\vec{e}_i}(D_{\vec{e}_j} f)$ ou $f_{x_j x_i}$ denotaremos as derivadas parciais de 2ª ordem de f, por $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$, $D_{\vec{e}_i}(D_{\vec{e}_j}(D_{\vec{e}_k} f))$ ou $f_{x_k x_j x_i}$ denotaremos as derivadas parciais de 3ª ordem de f e assim sucessivamente.

Exemplo Dar as derivadas parciais de 2ª ordem da função $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + \cos x$.

Definição Uma função f é de classe C^n em um aberto $\Omega \subset R^m$, e denotamos $f \in C^n(\Omega)$, $n \in N$, se todas as derivadas parciais até ordem n existem e são funções contínuas em Ω.

Teorema (Cauchy-Schwarz)

Se f é uma função de classe C^2 em um aberto contendo o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ então temos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Um exemplo bem conhecido de função para a qual $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0)$ é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{em } P_0 = (0,0).$$

Diferenciabilidade

É fácil mostrar a seguinte caracterização de diferenciabilidade para funções reais de uma variável real.

Teorema Se $\phi : I \subset R \to R$, I aberto, $x_0 \in I$, temos que ϕ é diferenciável em x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists a \in R$ tal que $\lim_{h \to 0} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) - a \cdot h}{|h|} = 0$, e neste caso $a = \phi'(x_0)$.

Este teorema sugere-nos como definir diferenciabilidade para funções $f : D_f \subset R^n \to R$.

Definições: Seja $f : D_f \subset R^n \to R$, D_f aberto de R^n.

i) Dizemos que f é diferenciável em $P \in D_f$ se ela satisfaz :

d1) Existem todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P)$, $j = 1,2,...,n$;

d2) $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{f(P+H) - f(P) - \nabla f(P) \cdot H}{\|H\|} = 0$, onde temos $H = (h_1, ..., h_n) \in R^n$ e $(P+H) \in D_f$.

ii) Dizemos que f é diferenciável em um conjunto $A \subset D_f$ se ela for diferenciável em todo ponto de A.

iii) Dizemos que f é diferenciável se ela é diferenciável em seu domínio.

<u>Notações</u> Nas condições das definições anteriores:

1) O termo $\nabla f(P) \cdot H$ chama-se diferencial de f em P e H, e denotamos $df(P, H)$ ou $f'(P) \cdot H$, assim temos

$$df(P,H) = f'(P) \cdot H = \nabla f(P) \cdot H =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right) \cdot (h_1, ..., h_n) =$$

$$= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + ... + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \ .$$

2) O termo $\nabla f(P)$ (gradiente de f em P) é chamado derivada de f em P e denotamos $Df(P)$ ou $f'(P)$, assim $\nabla f(P) = Df(P) = f'(P) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$.

<u>Observação</u> Uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ se, e somente se, são válidas as condições:

d1) Existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$;

d2) $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(P_0)(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

neste caso temos $H = (h,k)$.

Equivalentemente vale o que denotamos por d2'), isto é,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(P_0)(x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

Antes de interpretarmos a diferenciabilidade geometricamente, façamos o seguinte teorema

<u>Teorema</u> Uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ se e somente se existe um plano Π_{P_0}, passando por $(P_0, f(P_0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, tal que são válidas

i) $\Pi_{P_0}: \ z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$;

ii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - z}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0.$$

Neste caso $a = f_x(x_0, y_0)$ e $b = f_y(x_0, y_0)$.

Geometricamente temos o esquema:

Exemplos

1) Dada a função $f(x,y) = x^2y - 2xy$ pedimos:

i) mostre que f é diferenciável em todo ponto $P_0 \in R^2$;

ii) calcule $df(P,H)$;

iii) determine a equação de Π_{P_0}, plano tangente ao gráfico de f, em $P_0 = (0,0)$ por meio de seu vetor normal $\nabla = (f_x(0,0), f_y(0,0), -1)$.

2) Estude se $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + 2y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável em $(0,0)$.

3) Estude a diferenciabilidade da função do Exemplo 2 acima em um ponto $(x_0, y_0) \in R^2 - \{(0,0)\}$.

Exercício Estude a diferenciabilidade de $f(x,y) = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ em $(0,0)$.

Teorema Se f e g são funções diferenciáveis em $P \in R^n$ então $f \pm g$; $f \cdot g$; $\dfrac{f}{g}$ $(g(P) \neq 0)$ são diferenciáveis em P e são válidas :

i) $d(f \pm g)(P,H) = df(P,H) \pm dg(P,H)$;

ii) $d(f \cdot g)(P,H) = f(P) \cdot dg(P,H) + g(P) \cdot df(P,H)$;

iii) $d(\frac{f}{g})(P,H) = \frac{g(P)df(P,H) - f(P)dg(P,H)}{g^2(P)}$.

<u>Teorema</u> Se f é diferenciável em P então f é contínua em P.

O último teorema é utilizado, algumas vezes, para mostrar que uma função não é diferenciável em um ponto. Mostra-se que ela não é contínua nesse ponto.

<u>Exemplo</u> Estude a diferenciabilidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & se \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & se \ \ (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

A existência das derivadas parciais não é suficiente para garantir a diferenciabilidade como podemos ver no próximo exemplo.

<u>Exemplo</u> Dada a função:

$f(x,y) = \begin{cases} x + y - 2, & se \ \ x = 1 \text{ ou } \ y = 1 \\ 2 \quad , & se \ \ x \neq 1 \ \text{ e } \ y \neq 1 \end{cases}$. Mostrar que as

derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ existem, porém f não é diferenciável em $(1,1)$.

Enunciamos a seguir condições suficientes para diferenciabilidade.

<u>Teorema</u> Se f tem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um aberto então f é diferenciável nesse aberto.

Isto é, se $f \in C^1(\Omega)$ então f é diferenciável em Ω. Segue que toda função polinomial é diferenciável.

<u>Exemplo</u> Estude a diferenciabilidade de $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2)}$ em R^2-$\{(0,0)\}$.

A recíproca do último teorema não é válida, isto é, f pode ser diferenciável em P e as derivadas parciais (que existem!) podem não ser contínuas em P.

<u>Exemplo</u> A função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \ , & se \ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ \ , & se \ \ (x,y) = (00) \end{cases},$$

é diferenciável em $(0,0)$ porém f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$.

<u>Diferenciais</u>

<u>Exemplos</u> Calcule $df(P,H)$ nos casos:

(i) $f(x,y)=x$;

(ii) $f(x,y)=y$.

Motivados por estes exemplos usaremos a seguinte notação:

$$H=dP=(dx_1,\cdots,dx_n) \text{ e } df=df(P,H)=df(P,dP)=$$
$$=\nabla f(P)\cdot dP=\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)dx_1+\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(P)dx_n.$$

Se $z=f(x,y)$ é costume escrever $dz=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$; entendendo-se que as derivadas parciais são calculadas em um dado ponto $P=(x,y)$.

De modo análogo se $w=f(x,y,z)$ é diferenciável temos que:

$$dw=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz$$

<u>Exemplos:</u> Calcule dz se $z=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ e dw se $w=x^2y+xe^z$.

Acréscimos

Seja $z = f(x, y)$, se f é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ então:

i) existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)$;

ii) vale que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(P_0)\cdot(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Assim, se $dz = df = df(P_0, H) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)\Delta y$, onde $H = (\Delta x, \Delta y)$ e $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$ $= f(P_0 + H) - f(P_0)$ teremos $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta z - dz}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$ e podemos dizer que dz é uma aproximação da variação de f quando P vai de P_0 para $P_0 + H$, $(= \Delta z)$.

Ou seja temos:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Usando a notação $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$ teremos $\Delta z \approx dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, para dx e dy suficientemente pequenos (note que as derivadas parciais são todas calculadas em P_0).

Podemos utilizar este fato para aproximar a variação de z correspondente a pequenas variações de x e y.

Observação: A extensão ao caso de funções de 3 ou mais variáveis é óbvia.

Exemplos: 1) Suponha que a temperatura de uma placa metálica seja dada por $T(x,y)=3x^2-xy$. Utilizando diferenciais obtenha uma aproximação da diferença de temperatura entre os pontos (1,2) e (1,01 , 1,98).

2) Suponha que as dimensões (em polegadas) de um paralelepípedo retângulo variem de 9 ; 6 e 4 para 9,02 ; 5,97 e 4,01 respectivamente. Utilizando diferenciais obtenha uma aproximação da variação do volume. Qual a variação exata do volume?

Regra da Cadeia

Seja $f: D_f \subset R^n \to R$, D_f aberto em R^n. Seja também C uma curva em R^n descrita pela função vetorial $P: I \subset R \to R^n$ tal que $C \subset D_f$, isto é $P(t) \in D_f$, $\forall t \in I$.

Temos então a função composta dada por $(f \circ P)(t) = f(P(t))$, $\forall t \in I$.

Teorema (Regra da Cadeia)

Nas condições acima se f e P são diferenciáveis então $(f \circ P)$ também o é e vale: $(f \circ P)'(t) = \nabla f(P(t)) \cdot P'(t)$, $t \in I$

Observação Se $P(t) = \left(x_1(t), ..., x_n(t)\right)$ então temos que vale $\frac{d}{dt}(f \circ P)(t) = \frac{d}{dt}\left[f\left(x_1(t), ..., x_n(t)\right)\right] =$

$$= \nabla f(P(t)) \cdot P'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

Exemplo Sejam $f(x, y) = xy$ e $P(t) = \left(t^3, t^2\right)$ considere a composta $F(t) = (f \circ P)(t)$ e :

i) Calcule $F(t)$;
(ii) Calcule $F'(t)$;
iii) Verifique que $F'(t) = \nabla f(P(t)) \cdot P'(t)$.

Observações:

1ª) Se $z = f(x, y)$ e $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$ podemos considerar $z = F(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$ e daí obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

2ª) Se $z = f(x, y)$, $y = y(x)$ podemos considerar $z = F(x) = f(x, y(x))$ daí obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Exemplos: 1) Dada $u(x,y,z) = xy + xz + yz$; $x = r$, $y = r\cos t$, $z = r\,\text{sen}\,t$ encontre $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

2) Se f é uma função diferenciável nas variáveis x e y; $u = f(x,y)$; $x = r\cos\theta$; $y = rsen\theta$ mostre que:

i) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\cos\theta - \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{sen\theta}{r}$, e que

ii) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot sen\theta + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{r}$.

O próximo teorema dá uma fórmula simples para calcular derivadas direcionais de funções diferenciáveis em termos das derivadas parciais.

Teorema Se f é diferenciável em P_0, então f possui derivadas direcionais em todas as direções $\vec{u}$ e vale

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\vec{u} = df(P_0,\vec{u}), \quad \|\vec{u}\| = 1.$$

Corolário Se f é diferenciável em P_0 e $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ então, o máximo e o mínimo valor da derivada direcional de f em P_0 ocorrem na direção e sentido de $\vec{u}_1 = \dfrac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$ e $\vec{u}_2 = -\dfrac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$, respectivamente.

Observação O vetor $\nabla f(P_0)$ dá a direção e sentido em que f cresce mais rapidamente, e $-\nabla f(P_0)$ dá a direção e o sentido de maior decrescimento de f no ponto P_0.

Exemplo Dada a função $f(x,y,z)=$ $=(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2$. Qual a direção de maior crescimento da função f no ponto (2.-1,2)? Qual é a derivada direcional de f nessa direção, nesse ponto?

Plano Tangente a uma Superfície

Definição A superfície de nível S_k, de uma função $w=F(x,y,z)$, correspondente ao valor $w=k$, $k=$constante, é o subconjunto de R^3: $S_k=\{(x,y,z)\in D_F \ / \ F(x,y,z)=k\}$.

Exemplo Se $w=F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ então a superfície de nível da função F, correspondente ao valor $w=r,\ r>0$ é $S_r=\{\ (x,y,z)\in R^3 \ / \ x^2+y^2+z^2=r\ \}$ que é uma superfície esférica com centro na origem e raio $\sqrt{r}$.

Definição Seja $F:\Omega\subset R^3\to R$ e S uma superfície dada por $S=\{(x,y,z)\in\Omega \ / \ F(x,y,z)=c\}$. Se C_P é uma curva descrita por uma função vetorial $P:I\subset R\to R^3$ dizemos que C_P está em S se $F(P(t))=c,\ \forall t\in I$.

Nas mesmas condições da definição acima observamos:

(i) Se F é diferenciável em Ω e P é derivável em I, temos $\nabla F(P(t))\cdot P'(t)=0,\ \forall t\in I$. De fato, derivando $F(P(t))=c$, em relação a t, o resultado segue da regra da cadeia.

(ii) Se P_0 é um ponto de S, C_P uma curva qualquer em S passando por P_0, isto é, existe $t_0\in I$ tal que $P(t_0)=P_0$, então pela observação (i) temos que $\nabla F(P_0)\cdot P'(t_0)=0$, isto é, $\nabla F(P_0)\perp P'(t_0)$. Como a curva C_P é arbitrária, vemos que as tangentes a todas as curvas de S, que passam por P_0, estão em um mesmo plano, a saber, aquele determinado por $\nabla F(P_0)$ e pelo ponto P_0.

Pelo que foi dito acima é natural a definição:

<u>Definição</u> Seja S uma superfície da forma $S=\{(x,y,z)\in\Omega \setminus F(x,y,z)=c\}$, com F de classe C^1 no aberto $\Omega\subset R^3$. Se $P_0\in S$ e $\nabla F(P_0)\neq\vec{0}$, o plano tangente à S em P_0, denotado Π_{P_0}, é o plano que passa por P_0 e tem $\nabla F(P_0)$ como vetor normal. Sua equação é $\Pi_{P_0}:(P-P_0)\cdot\nabla F(P_0)=0$. Se denotarmos $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ e $P=(x,y,z)$ for um ponto arbitrário desse plano, a equação pode então ser posta na forma: $(x-x_0)\dfrac{\partial F}{\partial x}(P_0)+(y-y_0)\dfrac{\partial F}{\partial y}(P_0)+(z-z_0)\dfrac{\partial F}{\partial z}(P_0)=0$.

Observação: Se $\nabla F(P_0)=\vec{0}$ não definimos o plano tangente à S em P_0.

Exemplos:

(1) Seja S a superfície dada por $S = \{(x, y, z) \in R^3 \setminus z = f(x, y),\ (x, y) \in D \text{ aberto de } R^2\}$, com f de classe C^1 em D. Encontre a equação do plano tangente à S em $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

(2) Dar a equação do plano tangente à S, onde S é dada por $2x^2 + y^2 - z = 0$, no ponto $P_0 = (1,2,6)$.

(3) Ache a equação do plano tangente à superfície $z = 2x^2 - 3xy + y^2$ que seja paralelo ao plano $10x - 7y + z = 0$.

(4) Ache as equações paramétricas da reta tangente à curva de intersecção das seguintes superfícies no ponto indicado $S_1 :\ xy + z = 0;\ \ S_2 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$ em $P_0 = (2,1,-2)$.

Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis

Máximos e Mínimos Locais

Definição Uma função $f : D_f \subset R^n \to R$ tem um máximo (mínimo) local em $P_0 \in D_f$ se existe uma bola aberta $B_r(P_0)$ tal que $f(P) \le f(P_0)$ $(f(P) \ge f(P_0))$, para todo $P \in B_r(P_0) \cap D_f$.

Dizemos que P_0 é um extremo local de f se P_0 é um ponto de máximo ou de mínimo local, e $f(P_0)$ é um valor extremo se P_0 é um extremo.

Observações: i) Se f tem máximo (mínimo) local em P_0, então $-f$ tem um mínimo (máximo) local em P_0.

ii) Se f é uma função não negativa são equivalentes:

a) P_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f;

b) P_0 é ponto de máximo (mínimo) local de f^2.

No gráfico acima temos que P_1 e P_3 são pontos de mínimo local, já P_2 e P_4 são pontos de máximo local.

Nos pontos $(P_1, f(P_1))$; $(P_2, f(P_2))$; $(P_3, f(P_3))$ os planos tangentes são paralelos ao plano xy, será que tal comportamento repete-se para todos os pontos extremos de f? Não! Observando $(P_4, f(P_4))$ notamos que aí não existe o plano tangente.

Teorema Se $f : D_f \subset R^n \to R$, D_f aberto de R^n, tem um valor extremo em $P_0 \in D_f$ e é derivável nesse ponto então $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = 0$, para todo $i \in \{1,2,..,n\}$.

Definição Chamamos pontos críticos de f os pontos de D_f para os quais todas as derivadas parciais de 1ª ordem se anulam, ou pelo menos uma dentre elas não existe.

Exemplos: 1) Encontre os pontos críticos de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) Idem para $f(x,y)=e^x \operatorname{sen} y$ e para $g(x,y)=x^2+4y^2-x+2y$.

Observação: Do último teorema concluímos que o conjunto dos pontos extremos de uma função, definida em um conjunto aberto, está contido no conjunto de seus pontos críticos. Pode, no entanto, ocorrer de nenhum ponto crítico ser ponto extremo.

Definição Um ponto crítico P_0 é dito ponto de sela se $f(P_0)$ não é valor extremo de f.

Considere, por exemplo, a função $f(x,y)=x^3$ então todo ponto da forma $(0,y_0)$ é ponto crítico para f porém, não são pontos extremos para f.

Exemplos:

1) Ache os extremos de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

2) Idem para $f(x,y)=1+x^2+y^2$.

3) Idem para $f(x,y)=y^2-x^2$.

Observação O último teorema e a última observação nos dizem onde procurar os pontos extremos de uma função, entre seus pontos críticos, porém não nos dizem como identificar os pontos críticos que são extremos.

Caracterização de Máximos e Mínimos Locais

Seja $z = f(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas até 2ª ordem num aberto $\Omega \subset R^2$. Definimos a função Hessiana de f, $H = \Delta : \Omega \to R$ por:

$$H(x, y) = \Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Teorema Nas condições acima seja $P_0 \in \Omega$ tal que $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$. Então temos

I) $\left.\begin{array}{r} \Delta(P_0) > 0 \\ f_{xx}(P_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_0$ é ponto de mínimo local de f;

$\left.\begin{array}{r} \Delta(P_0) > 0 \\ f_{xx}(P_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_0$ é ponto de máximo local de f;

II) $\Delta(P_0) < 0 \Rightarrow P_0$ é ponto de sela;

III) $\Delta(P_0) = 0$, nada se pode concluir.

Exemplos :

1) Determine os extremos de $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

2) Idem para $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

Máximos e Mínimos Globais

Definição Uma função $f : D_f \subset R^n \to R$ tem um máximo global (mínimo global) em $P_0 \in D_f$ se $f(P) \leq f(P_0)$ $(f(P) \geq f(P_0))$, para todo $P \in D_f$.

Exemplo Achar os extremos de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ cujo domínio é $D_f = \{ (x, y) \in R^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 4 \}$.

Uma condição suficiente para a existência de máximos e mínimos globais é:

Teorema Se f é uma função contínua, definida em um conjunto compacto, então f possui pelo menos um ponto de máximo global e um ponto de mínimo global.

Observação Um ponto $P_0 \in A \subset R^n$ é ponto de fronteira de A se não for ponto interior de A.

Exemplos:

1) Encontre os valores extremos de $f(x,y)=y^2-x^2$ se $D_f=\{(x,y)\in R^2\ /\ x^2+y^2\le 1\}$.

2) Uma companhia planeja fabricar caixas retangulares fechadas com 8 pés cúbicos de volume . Se o material da tampa e do fundo custa o dobro do material dos lados, dimensione a caixa de modo a minimizar o custo.

Multiplicadores de Lagrange

O método de Lagrange fornece condições para obtenção de candidatos à pontos de máximo e mínimo de funções de R^3 em R, com restrições do tipo $g(x,y,z)=0$.

Teorema Sejam $f,g:\Omega\subset R^3\to R$, com derivadas parciais contínuas no aberto Ω. Se $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ e f tem um valor extremo em P_0 sujeito a condição $g(x,y,z)=0$, com $\nabla g(P_0)\neq\vec{0}$ então existe $\lambda\in R$ tal que $\nabla f(P_0)=\lambda\nabla g(P_0)$ (I)

Observações: i) O teorema também vale para funções de n variáveis.

ii) Para se minimizar ou maximizar uma função f, sujeita às condições de vínculo $g_1=0,....g_n=0$, devemos estudar a função $f-\lambda_1 g_1-...-\lambda_n g_n$.

O Método

Nas condições acima, a relação (I) fornece três equações e quatro incógnitas. O problema fica determinado usando-se a equação $g(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Assim obtém-se um "candidato" a ponto de máximo ou mínimo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Portanto, no estudo dos valores extremos de $w = f(x, y, z)$, sujeita a condição $g(x, y, z) = 0$, vamos estudar a nova função $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\, g(x, y, z)$, procurando seus pontos críticos por meio das equações:

$F_x = f_x - \lambda\, g_x = 0$;
$F_y = f_y - \lambda\, g_y = 0$;
$F_z = f_z - \lambda\, g_z = 0$ e
$F_\lambda = g(x, y, z) = 0$.

Exemplos :

1) Determinar o ponto do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ cuja soma das coordenadas seja máxima.

2) A interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $x + 2y + 2z - 5 = 0$ é uma elipse C. Determine qual o ponto de C mais próximo e o mais afastado da origem.

EXERCÍCIOS

1) Classificar a Superfície (cilíndrica, cônica etc...) e fazer um esboço da mesma, nos seguintes casos:

a) $z = 4 - y^2$. b) $z = 16 - x^2$. c) $x = 9 - y^2$. d) $x + z^2 = 4$.
e) $y = x^2$. f) $y = senx$. g) $x^2 + z^2 = y^2$. h) $x = 2$.
i) $y + z = 0$. j) $2x + 3y + z = 1$. k) $z = x^2 + 1$.
l) $y^2 - z^2 = 1$. m) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$. n) $x^2 - y^2 = z$.
o) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$. p) $z = 18 - x^2 - 9y^2$.
q) $y^2 + z^2 - x^2 = 1$.

2) Faça um esboço do conjunto A. Diga se ele é aberto, fechado, convexo, conexo, compacto. Encontre: $\operatorname{int} A$, A', $\overline{A}$, ∂A. Onde:

a) $A : x > 0 \; e \; y \geq 0$.

b) $A : 0 < y \leq |x| \quad e \quad 2y \leq x^2 + y^2 < 4y$.

c) $A : x^2 + y^2 < 1 \; ou \; x^2 + y^2 \geq 4$.

d) $A : |x| + |y| < 2$.

e) $A : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq z < 3 \quad e \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$, $A \subset R^3$.

3) Faça um esboço das curvas de equações paramétricas dadas, obtenha as respectivas equações cartesianas, indique a orientação das curvas com referência a valores crescentes dos parâmetros. Onde não houver especificação entende-se que o parâmetro assume todos os valores reais.

a) $x = 1 - 3t,\ y = 1 + 2t$;
b) $x = 2 + 5\cos t,\ y = 1 - 3\cos t$;

c) $x = t^2 - 1,\ y = 3t^2 + 2$;

d) $x = 3 + \cos t,\ y = 2 + sent,\ 0 \le t \le 2\pi$;

e) $x = 2\cos t,\ y = 2sent,\ z = 2\cos t;\ 0 \le t \le 2\pi$.

4) Considere a curva C obtida como intersecção das superfícies dadas. Pede-se: encontre uma parametrização da curva C; determine uma equação da reta tangente no ponto indicado; faça um esboço das superfícies destacando a curva C, nos casos:

a) Superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - 2x - 4y$. Ponto $(2, -2, 8)$.

b) Superfícies $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $x^2 + y^2 = x$. Ponto $(1, 0, 0)$.

c) Superfícies $4 = x^2 + y^2$ e $z = x$. Ponto $(2, 0, 2)$.

d) Superfícies $z = y^2 - x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Ponto $(1, 0, -1)$.

5) Esboçar o gráfico das seguintes funções, indicando no mesmo sistema de coordenadas o domínio e a imagem.

a) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, *D:* $x^2 + y^2 \le 9$

b) $z = 9 - y^2$, *D:* $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$

c) $z = x^3$, *D:* $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4$

d) $z = x^2$, *D:* $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 5$

6) Para as funções listadas a seguir: determine a imagem, desenhe as curvas de nível, obtenha e desenhe as interseções do gráfico da função com os planos coordenados, e esboce o gráfico, indicando no mesmo sistema de coordenadas o domínio e a imagem.

a) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2,\ D: x^2 + y^2 \leq 4$

b) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2},\ D: x^2 + y^2 \leq 25$

c) $f(x, y) = x^2 - y^2, D = R^2$.

7) Estude a existência dos limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$; d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

8) Discutir a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x,y) = xy \ln(xy)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 9\text{-}x^2\text{-}y^2 & se \ x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0 & se \ x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$

9) Encontre, onde existir, as derivadas parciais das funções dadas a seguir:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + 2y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

b) $f(x,y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$.

10) Mostre, usando a definição, que a função $f(x,y) = x^2 y$ é diferenciável no ponto $(1,2)$.

11) A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + 2y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável em (0,0)? Justifique.

12) Mostre que existem $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$ porém não é diferenciável em $(1,1)$ a função

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y-2 & se \quad x=1 \ ou \ y=1 \\ 2 & se \quad x \neq 1 \ e \ y \neq 1 \end{cases}.$$

13) Diga, justificando, se são diferenciáveis em R^2 as seguintes funções:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

14) Calcular a diferencial de cada uma das funções dada

a) $z = \dfrac{x^2}{y}$; b) $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

15) A temperatura T no ponto $P = (x, y, z)$ é dada por $T(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Utilizando diferenciais obtenha uma aproximação da diferença de T entre os pontos $(6,3,2)$ e $(6{,}1\ ,\ 3{,}3\ ,\ 1{,}98)$. Qual é a variação exata da temperatura? Qual é o erro cometido usando diferenciais?

16) Use a regra da cadeia para calcular:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ - $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ cos θ - $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sen* θ, para $z = f(x, y)$, com $\mathrm{x = r \cos\theta}$ e $\mathrm{y = r\,sen\,\theta}$.

b) $\mathrm{x}\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial x} + \mathrm{y}\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial y}$ se $\mathrm{z} = \mathrm{x\,sen}\left(\dfrac{\mathrm{y}}{x}\right)$.

17) Se f é uma função diferenciável de u, tome $u = bx\text{-}ay$ e verifique que $z = f(bx - ay)$ satisfaz a equação $a\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + b\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$, onde a e b são constantes.

18) Calcule as derivadas direcionais das seguintes funções, nos pontos e direções indicados

a) $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, em $P = (1, 2)$ e $\vec{v} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$;

b) $f(x,y) = 2x^2y^3\text{-}3x^3y^2$ em $P = (1,2)$ e na direção do vetor tangente unitário à curva $y = x^3 + 1$.

19) Seja $f(x, y) = y\,e^{2x}$. Dê a direção em que f cresce mais rapidamente no ponto (0,2). Calcule a derivada direcional de f nessa direção, nesse ponto.

20) Ache as equações paramétricas da reta tangente à curva de intersecção das superfícies $S_1 : x^2 + z^2 + 4y = 0$ e $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$ no ponto $P_0 = (0, 0, 0)$.

21) Ache a equação do plano tangente e equação da reta normal à superfície dada, no ponto indicado:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $P = (6,2,3)$;

b) $sen xy + sen yz + sen xz = 1$; $P = \left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$.

22) Ache a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = e^x \cos y$ no ponto $(0, \pi, f(0,\pi))$.

23) Determinar os pontos críticos das funções dadas e verificar quais são de máximo e quais são de mínimo nos casos: a) $f(x,y) = 5 - 2x^2 - 3y^2$; b) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$.

24) A distribuição de temperatura na chapa retangular limitada pelas retas $x = 0$, $x = 2$, $y = -2$, $y = 2$ é dada por $T(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$. Achar as temperaturas máxima e mínima, e os pontos onde elas ocorrem. Diga porque existem máximo e mínimo absolutos.

25) Encontre os pontos sobre a curva $xy = 1$, $0 < x \leq 4$, $0 < y \leq 10$ que estão mais afastados, e os que estão mais próximos da origem. Porque existem tais pontos? (Usar multiplicadores de Lagrange).

26) Achar as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume 32 u3 e de área mínima (Usar multiplicadores de Lagrange).

27) A temperatura T de uma placa D: $x^2 + y^2 \leq 4, \; y \geq 0$ é dada pela função $T(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$. Encontre os pontos de máximo e de mínimo local de T. Encontre os pontos mais quentes e mais frios da placa e suas respectivas temperaturas.

28) Encontre os pontos da superfície $y^2 - xz = 4$ que estão mais próximos da origem e encontre a distância mínima.

29) O custo total do material utilizado na fabricação de uma caixa retangular sem tampa deve ser R$ 10,00. Se o material para o fundo da caixa custa 15 centavos por cm^2 e o material para os lados custa 30 centavos por cm^2 encontre as dimensões da caixa de volume máximo que pode ser fabricada.