Complementos sobre Números Complexos

Ementa

Projeto de Dupla Diplomação UNESP/INSA de Lyon.
Material de apoio para Números Complexos.
Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares.
Depto de Matemática – Faculdade de Ciências – UNESP – Bauru.

1 Introdução

No início dos estudos do Cálculo é usual a apresentação do corpo ordenado completo dos números reais. Tal apresentação é feita, geralmente, na forma axiomática, no entanto, é possível construir o sistema dos números reais partindo-se dos números Naturais (sendo este último obtido a partir dos axiomas de Peano). Os estágios de tal construção podem ser vistos do ponto de vista da solução de equações polinomiais.

No sistema dos números naturais N uma equação da forma (1) $x+n=m$, não tem raiz para $n>m$. No domínio Z dos inteiros qualquer equação da forma (1) tem raiz, mas uma equação da forma (2) $ax=b$, com $a,b\in Z$ e $a\neq 0$ geralmente não tem raiz em Z.

A situação descrita acima é remediada no corpo Q, dos números racionais, onde toda equação da forma (2') $px=q$ com $p,q\in Q$ e $p\neq 0$ tem raiz. No entanto, por exemplo, uma equação da forma (3) $x^n=z$ com $n\in N$ e $z\in Q$ pode não ter raiz em Q (tome $n=z=2$). Essa situação é parcialmente remediada no corpo R, dos números reais, onde qualquer equação da forma (3') $x^n=\varepsilon$, $\varepsilon\in R$, tem raiz se n é ímpar, porém, não terá raiz se n é par e ε é negativo, desde que potências pares em corpos ordenados são positivas.

Para encerrarmos esse processo afirmamos ser possível construir um corpo completo (não ordenado), que chamaremos de corpo dos números complexos e denotaremos por C, que além de conter uma "cópia" de R tem a propriedade de: toda equação polinomial com coeficientes em C tem uma raiz em C (em particular $x^2 = -1$ terá raízes em C).

Um corpo com essa última propriedade é chamado de algebricamente fechado. O teorema que assegura que C é algebricamente fechado é chamado de Teorema Fundamental da Álgebra e foi primeiramente provado por Gauss em sua tese de doutorado.

2 Estrutura Algébrica e Completude

2.1 O Corpo dos números complexos

Consideremos o conjunto, denotado por C, formado por todos os pares ordenados (x, y) com $x, y \in R$ e definamos nesse conjunto duas operações, a soma indicada por " + " , e o produto indicado por " $\cdot$ " tais que:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$,

b) $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 \ , \ x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$,

quaisquer que sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$.

Indicando por $z_1 = (x_1, y_1)$; $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$ elementos quaisquer de C temos que são válidas as seguintes propriedades:

Comutativas: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

Associativas: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ e $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

Distributiva: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$;

Existência de elementos neutros: existem dois números complexos distintos, denotados por $0 = z_0 = (0,0)$ e $1 = z_u = (1,0)$, tais que, $z + z_0 = z$ e $z z_u = z$ para todo $z = (x, y) \in C$;

Existência de opostos: para todo $z = (x, y) \in C$, existe $-z = (-x, -y) \in C$ tal que $z + (-z) = z_0 = (0,0)$;

Existência de inversos: para todo $z = (x, y) \in C$, $z \neq (0,0)$ existe $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} , \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ tal que $z z^{-1} = z_u = (1,0)$.

Tais propriedades fazem com que C, munido das operações " $+$ " e " $\cdot$ ", tenha a estrutura algébrica conhecida como corpo (o que denotamos por $\langle C, +, \cdot \rangle$). Os elementos de C serão chamados de números complexos.

2.2 Notação

O símbolo usual para um número complexo não é (x, y) mas $x+iy$, esta notação é devida a Gauss que, embora não tenha sido o primeiro a utilizá-la, foi quem a propagou.

Para estabelecer a notação $x+iy$ procederemos com segue. Primeiro note que:

....

sendo assim, podemos identificar o número complexo $(x_1, 0)$ com o número real x_1. Rigorosamente estamos verificando que existe um isomorfismo entre o conjunto dos complexos da forma $(x, 0)$ e o corpo R dos números reais.

Agora definimos $i=(0,1)$ e então teremos que .....

Finalmente observamos que $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=$ $(0\cdot 0-1\cdot 1\,,\,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1$. Nesse sentido podemos dizer que $i=\sqrt{-1}$.

A notação $x+iy$ é mais conveniente e será utilizada preferencialmente a partir de agora. Cálculos algébricos são, com tal notação, mais fáceis, basta utilizar todas as regras algébricas usuais mais a regra $i^2=-1$, assim é que ....

O inverso multiplicativo dado em 2.1 é, nessa nova notação,...

Dado o número complexo $z = x + iy$ chamaremos x de parte real e y de parte imaginária. Usaremos então as notações $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$.

2.3 Interpretação Geométrica e Completude de C

Desde que pares ordenados (x, y) indicam coordenadas no plano R^2 nós podemos visualizar C como um plano, com o número complexo $z = x + iy$ correspondendo ao ponto (x, y) no plano coordenado.

A identificação de $(x,0)$ com x leva-nos a chamar a reta que contém tais pontos $(x,0)$ de "o eixo real". O eixo y, em ângulo reto com o eixo real, é chamado de "eixo imaginário". Obtemos dessa forma o plano de Argand-Gauss e, do mesmo modo que à reta estava associada o corpo dos reais, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano coordenado e o conjunto dos números complexos.

O fato de C ser completo pode ser entendido geometricamente, como a não existência de "buracos" nesse plano, isto é, a completude de C afirma que não existe ponto no plano para o qual não corresponda um número complexo. A completude de C é consequência direta da completude de R.

Se a cada número complexo $z = x + iy$ associarmos o vetor que tem como representante o segmento que vai de $(0,0)$ até (x, y) podemos interpretar a operação de adição de números complexos como a soma de vetores em R^2.

Projeto de Dupla Diplomação UNESP/INSA de Lyon.
Material de apoio para Números Complexos.
Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares.
Depto de Matemática – Faculdade de Ciências – UNESP – Bauru.

Com o objetivo de estabelecer uma maneira de medir a distância entre dois números definiremos o módulo de um número complexo.

<u>Definição</u> Dado $z = x + iy \in C$ o módulo de z, denotado por $|z|$, é definido por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tal módulo de z expressa a distância do número complexo $z = x + iy = (x, y)$ até o complexo $0 = 0 + i0 = (0,0)$. A partir da noção de módulo e seu significado geométrico se quisermos medir a distância entre z_1 e $z_2 \in C$ basta tomarmos $|z_1 - z_2|$.

<u>Definição</u> Dado um número complexo qualquer $z = x + iy$ seu conjugado é $\overline{z} = x - iy$.

Observe que quando $z \in C$ é real então $\overline{z} = z$.

<u>Propriedades</u> Para quaisquer números complexos z, z_1, z_2 são válidas:

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

ii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$, $z_2 \neq 0 + i0$;

iii) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ e $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$;
iv) $\overline{\overline{z}} = z$;

v) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ e $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, para $z = x + iy$;

vi) $z_1 / z_2 = z_1 \overline{z_2} / |z_2|^2$, $z_2 \neq 0 + i0$;

vii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

viii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ e $|z_1 - z_2| \geq \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|$.

2.4 Forma Polar de um Número Complexo e Operações

2.4.1 Forma Polar

Considere agora um número complexo não nulo $z = x + iy$ e sejam: ℓ o segmento de reta que liga $0 + i0$ até z e θ o ângulo que o semi-eixo real positivo faz com ℓ, este medido no sentido anti-horário a partir do semi-eixo real.

Podemos então escrever $x = |z|\cos\theta$ e $y = |z| sen\theta$, dessa forma, teremos $z = x + iy = |z|(\cos\theta + isen\theta)$. Esta última expressão é chamada de forma polar do número complexo z. O número θ é chamado de argumento de z e denotado por $\arg(z)$, já o módulo de z é usualmente denotado $|z| = r$. Observe que no caso de limitarmos θ ao intervalo $[0, 2\pi)$ teremos para cada $z \in C$ um único argumento θ, $\arg(z)$, em $[0, 2\pi)$.

<u>Exemplo</u> Escrever os números complexos $z_1 = 1$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ na forma polar.

2.4.2 O Produto na Forma Polar

Dados $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$ números complexos arbitrários teremos que $z_1 \cdot z_2 = \ldots$

Assim $z_1 \cdot z_2$ é tal que $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ e $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

<u>Exemplo</u> O produto $z_1 \cdot z_2$, onde $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4})$ e $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$ será o número complexo.....

Obviamente o processo acima pode ser generalizado de modo que dados $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$,... ...,$z_n = r_n(\cos\theta_n + isen\theta_n)$ teremos que $z_1 \cdot .... \cdot z_n = \ldots\ldots$

Quando $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = r(\cos\theta + isen\theta)$ temos que.........

Já se $z = \cos\theta + isen\theta$ obtemos a fórmula de De Moivre......

Projeto de Dupla Diplomação UNESP/INSA de Lyon.
Material de apoio para Números Complexos.
Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares.
Depto de Matemática – Faculdade de Ciências – UNESP – Bauru.

2.4.5 A Divisão na Forma Polar

Dados $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$, com $r_2 \neq 0$, dividir z_1 por z_2 significa determinar um número complexo $z_3 = \rho(\cos\phi + isen\phi)$ tal que $z_1 = z_2 \cdot z_3$. Dessa forma, devemos ter, necessariamente, que

2.4.4 Raízes de um Número Complexo

Dado o número complexo $z = r(\cos\theta + isen\theta)$ nosso objetivo é encontrar todas as raízes n-ésimas de z, isto é, todos os números complexos w que satisfaçam a equação $w^n = z$, com $n \in N$.

Assim, existem n raízes n-ésima de z, descritas pela fórmula acima.

Utilizando-se a fórmula do produto e a fórmula da raiz n-ésima vem a seguinte generalização

EXERCÍCIOS

1) Calcule as raízes Sexta de $z = 8$.

2) Considere os números complexos: $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $z_2 = 2 + i2$; $w = \frac{z_1}{z_2}$. Pedimos:

i) Calcule o valor de w;

Projeto de Dupla Diplomação UNESP/INSA de Lyon.
Material de apoio para Números Complexos.
Prof. Dr. Marcelo Reicher Soares.
Depto de Matemática – Faculdade de Ciências – UNESP – Bauru.

ii) Calcule os módulos e os argumentos de z_1, z_2 e w;
iii) Expresse w na forma polar;
iv) Encontre o valore de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ e de $sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
v) calcule o valor de w^{2007}.

3) No plano de Argand Gauss considere A, B e I os pontos fixos $1+i$, $3-i$ e 2 respectivamente. A cada ponto $z \in C$ associamos o ponto $z' \in C$ tal que $z' = z^2 - 4z$. O ponto z' é chamado de imagem de z. São pedidos:

i) Calcule os pontos A' e B', imagens de A e B, respectivamente. O que você observa?
ii) Determine os pontos cuja imagem é o ponto fixo -5;
iii) Resolva os itens a), b) e c) abaixo:

a) Verifique que para todo $z \in C$ vale $z'+4 = (z-2)^2$
b) Deduza uma relação entre $|z'+4|$ e $|z-2|$ e, quando $z \neq 2$, uma relação entre $\arg(z'+2)$ e $\arg(z-2)$.
c) O que podemos dizer dos pontos M' para os quais M descreve a circunferência C de centro I e raio 2?

iv) Sejam: $E = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ fixo, $J = -4$ e E' a imagem de E, pedimos:

a) Calcule a distância entre I e E, que denotamos $d(I,E)$, e a medida, em radianos, do ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\overrightarrow{IE}$
b) Calcule $d(J,E')$.

4) Considere o plano de Argand Gauss. Se M é um ponto fixo do plano ao qual está relacionado o número complexo $z \in C - \{0 + i0\}$, designaremos por M' o ponto $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$. Isto é vale $\forall\ z \in C^* \rightarrow z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

<u>Parte A</u>:

i) Dado $z \in C^*$ determine as relações entre os módulos de z e de z' e uma relação entre os argumentos de z e z'.

ii) Mostre que M, M' e $0 + i0$ estão alinhados.

iii) Mostre que para todo $z \in C^*$ vale $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z - 1)$.

<u>Parte B</u>: Sejam $A = 1$ e $B = -1$, denote por C o conjunto dos pontos M do plano de Argand Gauss para os quais $|z - 1| = 1$.

i) Qual a natureza do conjunto C?

ii) Dado $z \in C$ tal que $z \neq 0 + i0$ pedimos:

a) Mostre que $|z'+1| = |z'|$ e interprete geometricamente tal igualdade:

b) É verdade que se z' verifica $|z'+1| = |z'|$ então z verifica a igualdade $|z - 1| = 1$?

iii) Faça um esboço de C. Se $z \in C$ descreva a contrução de z' utilizando os itens e partes anteriores.

5) Considere o número complexo $z = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) + isen(\frac{2\pi}{5})$ e denotemos $a = z + z^4$ e $b = z^2 + z^3$. Pedimos:

i) Mostre que para todo $w \in C$, $w \neq 1$ e todo $n \in N$ vale a igualdade: $1 + w + w^2 + ... + w^n = \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w}$;

ii) Calcule $1 + w + w^2 + w^3 + w^4$;

iii) Mostre que a e b são soluções de $x^2 + x - 1 = 0$;

iv) Mostre que $a = z + \frac{1}{z}$ e determine a em função de $\cos(\frac{2\pi}{5})$;

v) Resolva a equação do item (iii);

vi) Deduza o valor de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.