Soluções dos três problemas clássicos de construção por métodos não-euclidianos

Hermes A. Pedroso * e Juliana C. Precioso †

12 de novembro de 2015

Resumo

Neste trabalho será resgatado um pouco da rica história dos três problemas clássicos de construção, conhecidos por *quadratura do círculo*, *duplicação do cubo* e *trissecção do ângulo*. Introduzidos na Grécia, por volta dos séculos V e IV a.C., foi a partir de Euclides (século III a.C.), adepto das concepções platônicas, que surgiu a hipótese de que os três problemas deveriam ser resolvidos apenas com régua (sem marcas) e compasso.

Apesar dos esforços de muitos matemáticos e amadores, foi somente no século XIX, mediante a argumentos algébricos, que se estabeleceu, de modo definitivo, a impossibilidade de resolvê-los.

O objetivo principal deste trabalho é mostrar que é falsa a crença de que os gregos, na resolução de problemas de construções geométricas, trabalhavam somente com a régua e o compasso. Na tentativa de tais resoluções eram utilizadas todas as ferramentas disponíveis ou criavam outras adequadas. Como exemplo, serão apresentadas algumas curvas e métodos que se originaram neste contexto.

Palavras Chave: quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo.

Introdução

Na história da matemática alguns problemas adquiriram significado especial, pela sua natureza desafiadora, e influenciaram o futuro desenvolvimento dessa ciência.

No caso especial da geometria, essa situação se manifesta já na Grécia antiga com o surgimento de três problemas, que exigiram muito tempo de estudo até que a sua solução final fosse encontrada. Tais problemas são conhecidos como os problemas clássicos da antiguidade, a saber:

A quadratura do círculo: quadrar um círculo significa construir o lado de um quadrado cuja a área seja igual a área de um círculo dado, ou seja, tomando-se como unidade de comprimento o raio do círculo dado, o problema se reduz à construção de um segmento de medida $\sqrt{\pi}$, a partir de um segmento unitário.

A duplicação do cubo: duplicar um cubo significa construir o lado de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado, ou seja, tomando-se como unidade de comprimento a medida da aresta do cubo dado, o problema se reduz a construção de um segmento de medida $\sqrt[3]{2}$, a partir de um segmento unitário.

*Email: hermes@ibilce.unesp.br, Depto de Matemática, IBILCE - UNESP

†Email: precioso@ibilce.unesp.br, Depto de Matemática, IBILCE - UNESP

A Trissecção de um ângulo: trissectar um ângulo significa dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais.

Sabe-se, desde o século XIX, que esses problemas não podem ser resolvidos somente com a régua e o compasso. Para mais detalhes veja [11].

Há ainda na literatura, ver [13], uma grande discussão sobre o verdadeiro motivo dessa exigência, ou seja, de se usar apenas régua e compasso na resolução desses problemas.

Parece que há um consenso no fato de que os gregos, diante da incapacidade de encontrar uma solução com o emprego desse método, considerado mais elementar, recorriam a outros meios.

São exatamente esses "outros meios"o foco principal deste trabalho. Para isso, apresentaremos algumas das melhores ideias, em provável ordem cronológica, produzidas pela rica imaginação dos gregos na tentativa de encontrar tais soluções.

1 Hipócrates

Hipócrates de Chios (460 - 370 a.C.), trocou sua terra natal por Atenas, na qualidade de mercador. Consta que ludibriado por piratas tentou recuperar suas finanças trabalhando como professor de geometria. Ele não deve ser confundido com seu contemporâneo mais famoso, o médico Hipócrates de Cos. Segundo o historiador Proclo (410 - 485), Hipócrates compôs uma obra, *Elementos da Geometria*, antecipando-se por mais de um século à mais conhecida *Os Elementos* de Euclides (330 a.C. - 260 a.C.).

Organizou de modo lógico a geometria da época e demonstrou o seguinte importante resultado para a quadratura do círculo:

Proposição 1 (Euclides, XII, 2) *As áreas de círculos estão para si assim como os quadrados de seus diâmetros, ou seja,* $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}$*, em que* A_1 *e* A_2 *representam as áreas de dois círculos com diâmetros,* d_1 *e* d_2*, respectivamente.*

1.1 Hipócrates e a quadratura do círculo

Como aplicação da Proposição 1, Hipócrates fez algumas tentativas no sentido de resolver a quadratura do círculo. Uma dessas, refere-se à quadratura de lunas, ou seja, de figuras planas delimitadas por dois arcos circulares de raios diferentes.

Caso 1: considere ABC triângulo retângulo isósceles inscrito em um semicírculo com diâmetro AC. Trace os semicírculos com diâmetros AB e BC, conforme a Figura 1.

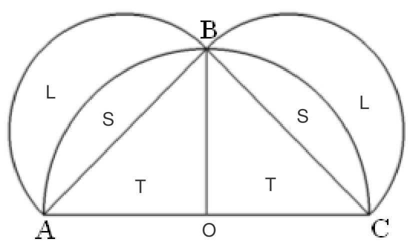

Figura 1: Áreas da luna e do triângulo

Observe que a construção anterior gerou regiões de áreas L, S e T, em que L é a área de uma luna e T de um triângulo retângulo de base $AO = a$ e altura $OB = b$.

Reconstituiremos agora os passos de Hipócrates para a quadratura da luna. Para isso, usaremos a Proposição 1 para mostrar que a área L é igual a área T e, portanto, que a luna é quadrável.

Uma vez que ABC é um triângulo retângulo isósceles, com $AB = BC$, pelo Teorema de Pitágoras tem-se $2AB^2 = AC^2$. Pela Proposição 1, vem que

$$\frac{S+L}{2S+2T} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{2AB^2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $2S + 2L = 2S + 2T$, ou seja, $L = T$.

Mostraremos agora, por equivalência de áreas, que se pode construir o quadrado de área $T = L$.

Considere o triângulo AOB, proveniente da Figura 1. Note que sua área T é igual a de um retângulo de base a e altura $\frac{b}{2}$.

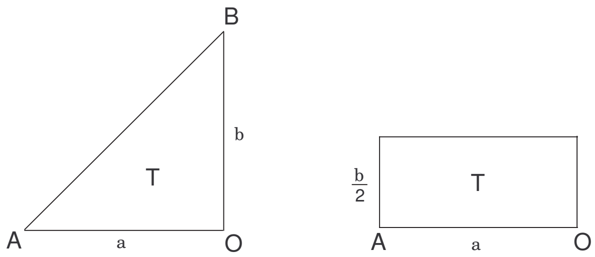

Figura 2: Equivalência das áreas do triângulo e do retângulo

Finalmente, para se construir o quadrado de lado x com área igual a do retângulo da Figura 2 deve-se encontrar a média proporcional, ou geométrica, entre a e $\frac{b}{2}$, ou seja, $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, ver Figura 3.

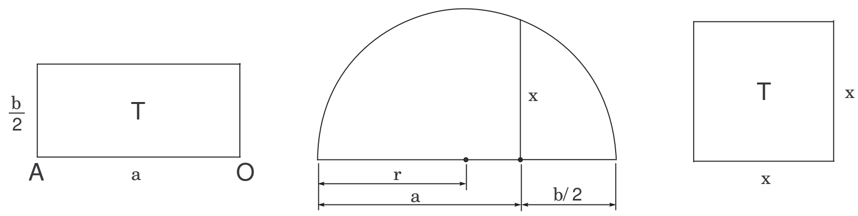

Figura 3: Construção da média geométrica entre a e $\frac{b}{2}$, em que $r = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{2}\right)$

Portanto, fica provada a quadratura da luna segundo Hipócrates.

Caso 2: considere um hexágono regular inscrito em um círculo e trace semicírculos com diâmetros em seus lados, como na Figura 4. Nesse caso, mostraremos que a luna de área L será quadrável se, e somente se, o círculo o for.

Observe que a construção da Figura 4 gerou regiões de áreas L, S e T, em que L é a área de uma luna e T a de um triângulo equilátero de lado AO. Além disso, temos que $AO = AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$. Pela Proposição 1

$$\frac{S+L}{3S+3T} = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{1}{4}.$$

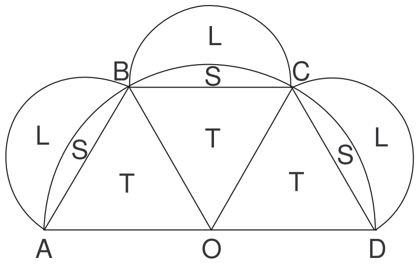

Figura 4: Uma luna não quadrável

Assim, $4L + 4S = 3S + 3T$, ou seja, $3L + (L + S) = 3T$. Essa igualdade nos mostra que como o triângulo é quadrável, a luna será quadrável se, e somente se, o semicírculo de área $L + S$ o for.

Esses casos mostram que Hipócrates identificou o problema da quadratura do círculo, reconhecendo sua dificuldade. Embora ele possa ter feito algum progresso investigando outros casos especiais, não conseguiu dar nenhuma contribuição a mais para resolver tal problema.

1.2 Hipócrates e a duplicação do cubo

Hipócrates, percebeu que poderia resolver esse problema ao estender a técnica de construção de uma média geométrica entre dois segmentos de medidas a e b, inserindo dois meios entre essas duas grandezas dadas.

Se x e y são dois meios proporcionais entre a e b, temos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

de onde segue que

$$x^2 = ay \text{ e } xy = ab.$$

Eliminando y e fazendo $b = 2a$ nas igualdades acima concluí-se que $x^3 = 2a^3$, ou seja, dado um cubo de aresta a, foi possível construir outro cubo de aresta x com o dobro do volume do cubo dado.

2 Hípias

Hípias de Elis (460 - 390 a.C.) foi um dos chamados filósofos sofistas, que ganhavam seu sustento ensinando nas ruas e praças, o que não era bem visto por componentes de outras escolas. Os discípulos de Pitágoras e de Platão, por exemplo, não aceitavam pagamento para partilhar seus conhecimentos com seus concidadãos. Os sofistas eram bem informados em muitos assuntos e contribuíram de modo especial para o desenvolvimento da matemática.

Preocupado em resolver o problema da trissecção do ângulo, Hípias introduziu na matemática uma curva, conhecida por trissectriz ou quadratriz. O processo de construção dessa curva é cinemático, pois ela é obtida pelos pontos de intersecção de dois segmentos de reta em movimento uniforme.

No quadrado $ABCD$, veja Figura 5, considere o lado DC deslocando para baixo uniformemente a partir de sua posição presente até coincidir com AB, e suponhamos que esse movimento leve exatamente o mesmo tempo que o lado AD leva para girar em sentido horário, de sua posição presente até coincidir com AB. Se as posições dos dois segmentos são dadas em um instante fixado qualquer por AD'' e $D'C'$, respectivamente, e se P é o ponto de intersecção desses segmentos, então o lugar descrito por P, durante esse movimento, será a trissectriz de Hípias, ou seja, a curva DPQ na Figura 5.

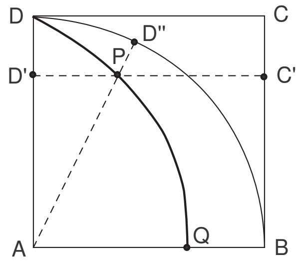

Figura 5: Construção da trissectriz

2.1 Hípias e a trissecção do ângulo

Dado um ângulo qualquer, através da construção da curva de Hípias, faz-se com facilidade a sua trissecção ou até mesmo a sua divisão em um número qualquer de partes iguais. Por exemplo, se $\widehat{PAB}$ é o ângulo a ser trissectado, basta dividirmos os segmentos BC' e AD', com os pontos E, F, E' e F'. Se as retas EE' e FF' cortam a trissectriz em G e H, respectivamente, as retas AG e AH, pela propriedade da trissectriz dividirão o ângulo PAB em três partes iguais.

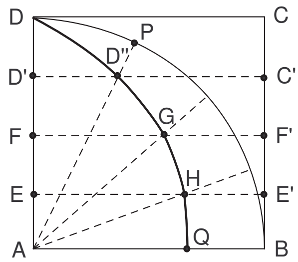

Figura 6: A trissecção de um ângulo segundo Hípias

Desse modo, conclui-se que essa a curva de Hípias resolve o problema da trissecção do ângulo. Ela também é chamada de quadratriz, pois pode ser usada para quadrar o círculo. Consta que Hípias sabia desse método de quadratura mas não conseguiu prova-lo. A quadratura por meio dessa curva foi dada mais tarde por Dinóstrato, como veremos na Seção 4.

3 Menaecmo

Menaecmo de Atenas (380 - 320 a. C.), astrônomo e geômetra da Academia de Platão, conseguiu resolver o problema da duplicação do cubo. Em sua solução usou duas curvas, a parábola e a hipérbole, especialmente inventadas por ele para essa finalidade. A elipse apareceu como corolário dessa invenção. Essas três curvas são chamadas até hoje de secções cônicas, porque Menaecmo as concebeu cortando três tipos de superfícies cônicas de uma folha, a de ângulo agudo (oxytome - elipse), a de ângulo reto (orthotome - parábola) e a de ângulo obtuso (amblytome - hipérbole), respectivamente, por um plano perpendicular à geratriz.

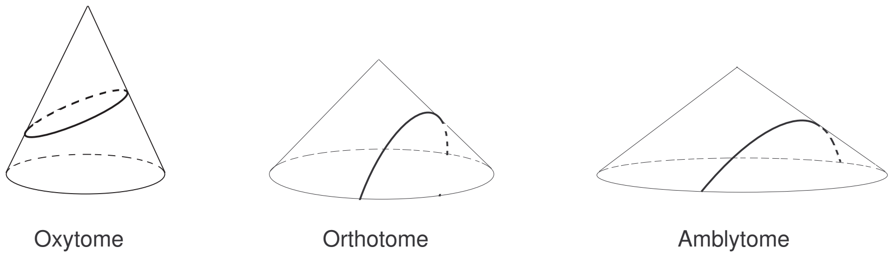

Figura 7: Secções cônicas

Observação 2 *A hipérbole de dois ramos só surgiria algum tempo depois, com Apolônio de Perga (262 - 190 a. C.). Menaecmo ainda não dispunha de sistemas de coordenadas, o que o obrigava a ser muito engenhoso.*

3.1 Menaecmo e a duplicação do cubo

Apresentaremos agora a solução de Menaecmo para este problema. Com as notações atuais, considerando-se a intersecção de uma parábola e de uma hipérbole cujas equações são dadas por $y = x^2$ e $xy = 2$, tem-se $x = \sqrt[3]{2}$, que é a aresta do cubo cujo volume é o dobro do de aresta unitária que se considera inicialmente.

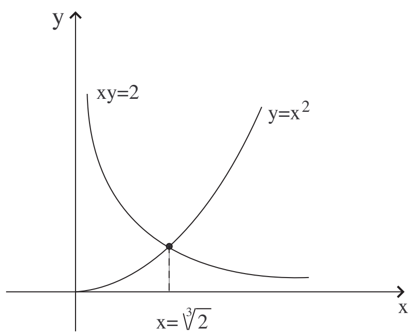

Figura 8: Duplicação do cubo

4 Dinóstrato

Dinóstrato de Atenas (390 - 320 a.C.), irmão de Menaecmo, foi também um matemático da academia de Platão. Vimos na seção anterior que Menaecmo resolveu o problema da duplicação do cubo usando cônicas. Já Dinóstrato resolveu o da quadratura do círculo utilizando a curva inventada por Hípias para a trissecção do ângulo. Para se ter uma ideia do método por ele empregado, é preciso deduzir a equação polar dessa curva e utilizar algumas noções de limite.

Conforme a Seção 2, o movimento do segmento DC tem velocidade constante, logo, a distância por ele percorrida é proporcional ao tempo gasto no seu percurso.

Analogamente, a amplitude do arco DB é proporcional ao tempo gasto no percurso do segmento AD. Como os dois movimentos começam e terminam simultaneamente, os tempos gastos por DC e AD são iguais e, portanto, existe uma proporcionalidade entre as distâncias por eles percorridas.

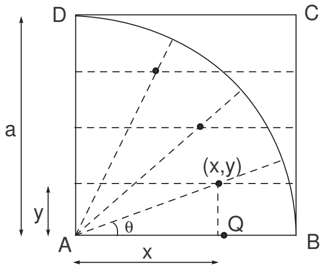

Figura 9: Relação entre as coordenadas de um ponto qualquer da quadratriz

Desse modo, chamando $AD = AB = a$, pela Figura 9, temos que um ponto arbitrário (x, y) da quadratriz satisfaz a relação

$$\frac{y}{a} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{ou seja,} \quad \theta = \frac{\pi y}{2a}.$$

Mas $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, de modo que a equação cartesiana é dada por

$$x = \frac{y}{\tan\dfrac{\pi y}{2a}} = y\cot\frac{\pi y}{2a}, \quad 0 < y < a.$$

4.1 Dinóstrato e a quadratura do círculo

A grande contribuição de Dinóstrato foi perceber que a solução do problema da quadratura do círculo estava relacionada com a distância AQ, ver Figura 9.

Considerando-se a equação cartesiana da quadratriz, o valor de AQ é igual ao valor de x, quando y se aproxima de zero. Assim,

$$\begin{aligned} AQ &= \lim_{y\to 0} y\cot\frac{\pi y}{2a} = \lim_{y\to 0}\frac{y\cos\frac{\pi y}{2a}}{\sin\frac{\pi y}{2a}} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\frac{2a}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2a}}{\dfrac{\sin\frac{\pi y}{2a}}{\frac{\pi y}{2a}}} = \frac{2a}{\pi} < a. \end{aligned}$$

Após ter obtido o segmento $AQ = \dfrac{2a}{\pi}$ pode-se determinar, através de construções com régua e compasso, os segmentos de comprimentos $\dfrac{\pi}{2a}$, π e $\sqrt{\pi}$ como na Figura 10.

Portanto, a área do círculo de raio a será igual a área do quadrado de lado $\sqrt{\pi}a$, ou seja, usando a curva Hípias, Dinóstrato conseguiu quadrar o círculo.

5 Arquimedes

Arquimedes de Siracusa, (287-212 a.C.) é considerado o maior sábio da antiguidade e um dos mais famosos de toda a história da ciência. Foi matemático,

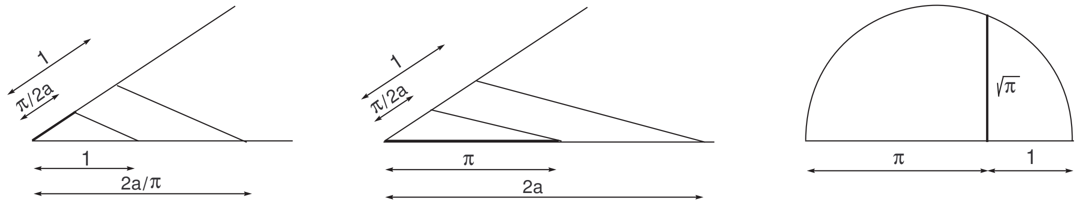

Figura 10: Construções de $\dfrac{\pi}{2a}$, π e $\sqrt{\pi}$.

físico, astrônomo e engenheiro, enriqueceu a geometria euclidiana, já altamente desenvolvida, contribuiu para o progresso da álgebra, lançou os fundamentos da mecânica e até prenunciou o cálculo diferencial e integral. Ao dar continuidade, e grande avanço, aos trabalhos de Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C.), aperfeiçoou o método de exaustão que seria durante 2000 anos o único instrumento seguro para o cálculo de áreas e volumes. Para mais detalhes sobre a vida e a obra de Arquimedes, ver por exemplo [4], [7], [8] e [13].

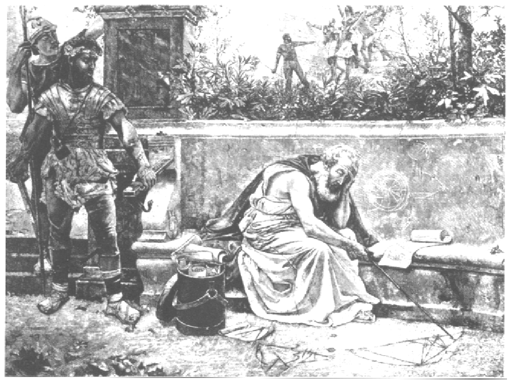

Figura 11: A morte de Arquimedes - Gustave Courtois (1853 - 1923)

Da grande obra de Arquimedes, para os propósitos deste trabalho, destacaremos a espiral, curva por ele inventada, provavelmente preocupado com a resolução dos problemas clássicos.

No tratado *Sobre Espirais*, ver [6] Arquimedes estudou as propriedades dessa curva, cuja definição é dada por:

Definição 3 (Espiral de Arquimedes) *A espiral é o lugar geométrico no plano de um ponto P que, partindo da origem O, move-se uniformemente sobre um segmento de reta que, também uniformemente, gira em torno de O. Atualmente, com o uso de coordenadas polares essa curva pode ser descrita por $r = a\theta$, em que a é uma constante.*

Com a espiral Arquimedes apresenta um exemplo que contraria a crença de que a matemática grega é essencialmente estática. A própria definição envolve a idéia de variabilidade e Arquimedes ao compor os dois movimentos encontrou a tangente a essa curva. O seu processo baseia-se em considerações cinemáticas, bem parecidas com as que seriam realizadas no Cálculo Diferencial a partir do século XVII, ver Figura 12.

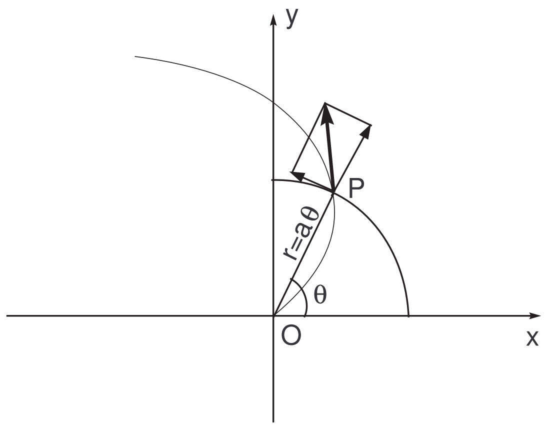

Figura 12: A espiral e a composição de movimentos

Entre as 28 proposições do tratado de espirais há várias que dizem respeito a áreas. Para exemplificar, será apresentada uma de interesse para a quadratura do círculo.

Proposição 4 (Proposição 24 do Tratado de Espirais) *Considere a espiral de Arquimedes dada na Figura 13. A área dessa espiral no primeiro giro é* $\dfrac{1}{3}$ *da área do círculo de raio* $OB = 2\pi a$*, em que* B *é o ponto atingido pela espiral quando* $\theta = 2\pi$*.*

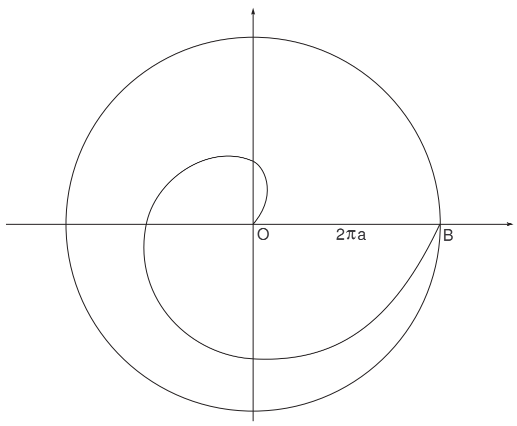

Figura 13: A espiral de Arquimedes

Demonstração: Divida o círculo de centro O e raio $OB = 2\pi a$ em n setores iguais, com ângulo central $s = \dfrac{2\pi}{n}$. Por construção, as retas que definem tais setores cortam a espiral em pontos cuja distância da origem é $r_k = a(ks)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, pois $\theta = ks$.

Agora, para cada arco da espiral, delimitado por um dos n setores, trace dois círculos, um inscrevendo-o e outro circunscrevendo-o, conforme a Figura 14.

Se P e R são pontos onde a espiral intercepta o k-ésimo setor OXY, então $OP = r_{k-1}$ e $OR = r_k$. Agora, denote as área dos k-ésimos setores OXY, OMR e

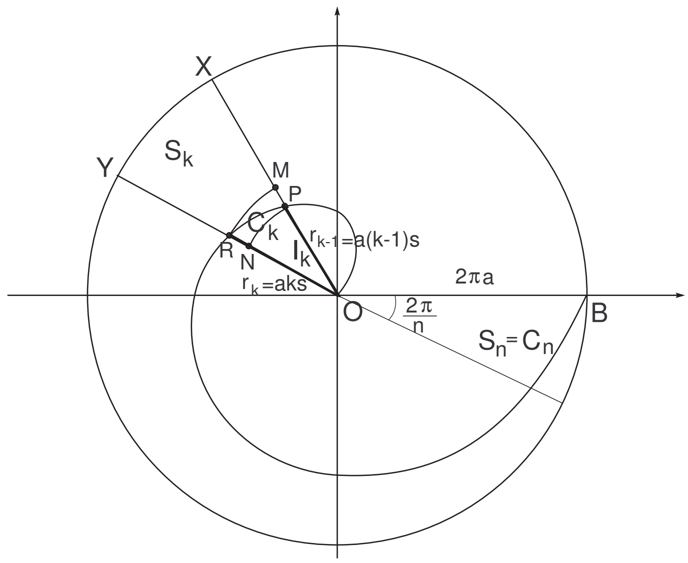

Figura 14: A quadratura da espiral

OPN, respectivamente, por s_k, c_k e i_k. Uma vez que a área de um setor circular, com ângulo central θ, de um círculo de raio r é dada por $\pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2\theta$, segue que

$$s_k = \frac{4\pi^3 a^2}{n}, c_k = \frac{\pi r_k^2}{n} \text{ e } i_k = \frac{\pi r_{k-1}^2}{n}.$$

Observe que $i_1 = 0$ e que a área $S = OPRB$, da primeira volta da espiral, está entre as áreas $C = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ e $I = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$, ou seja,

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n \leq S \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Como $c_k = i_{k+1}$ para $k < n$, segue que

$$\begin{aligned} C - I &= c_1 + c_2 + \ldots + c_n - i_1 - i_2 - \ldots - i_n \\ &= i_2 + i_3 + \ldots + i_n + c_n - i_1 - i_2 - \ldots - i_n \\ &= c_n = s_n = \frac{4\pi^3 a^2}{n} \end{aligned}$$

e essa diferença pode ser feita tão pequena quanto se queira tomando-se n suficientemente grande.

Seja A a área do círculo de centro O e raio $OB = 2\pi a$ e observe que

$$\begin{aligned} \frac{C}{A} &= \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \\ &= \frac{\frac{\pi r_1^2}{n} + \frac{\pi r_2^2}{n} + \ldots + \frac{\pi r_n^2}{n}}{n\frac{4\pi^3 a^2}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{(2\pi a)^2} \\ &= \frac{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2}{n r_n^2} \\ &= \frac{a^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + a^2 2^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \ldots + a^2 n^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{n a^2 n^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1 + 2^2 + \ldots + n^2}{n n^2}. \end{aligned}$$

Uma vez que por indução sobre n mostra-se que

$$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

segue que

$$\frac{C}{A} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{nn^2} = \frac{1}{6}\frac{\left(2n^2+3n+1\right)}{n^2}$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C}{A} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{\left(2n^2+3n+1\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Analogamente, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{I}{A} &= \frac{i_1 + i_2 + \ldots + i_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \\
&= \frac{0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1}}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \\
&= \frac{\frac{\pi r_1^2}{n} + \frac{\pi r_2^2}{n} + \ldots + \frac{\pi r_{n-1}^2}{n}}{n\frac{4\pi^3 a^2}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}}{(2\pi a)^2} \\
&= \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}}{nr_n^2} \\
&= \frac{a^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + a^2 2^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \ldots + a^2(n-1)^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}{na^2n^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2} \\
&= \frac{1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{nn^2} \\
&= \frac{\frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)}{nn^2} = \frac{1}{6}\frac{\left(2n^2-3n+1\right)}{n^2}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I}{A} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{\left(2n^2-3n+1\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Como $I \le S \le C$, então $\frac{I}{A} \le \frac{S}{A} \le \frac{C}{A}$ e, portanto,

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{I}{A} \le \lim_{n\to\infty}\frac{S}{A} \le \lim_{n\to\infty}\frac{C}{A} = \frac{1}{3}.$$

Assim, conclui-se que $S = \frac{1}{3}A$. ■

5.1 Arquimedes e a quadratura do círculo

5.1.1 A quadratura do círculo através da espiral

Considere um círculo de raio $r = a$ centrado na origem. Mostra-se primeiramente que é possível construir um retângulo com área πa^2. Para isso, considere a espiral de Arquimedes $r = a\theta$, como na Figura 15. A espiral tem intersecção com o eixo y no ponto $\frac{a\pi}{2}$, ou seja, obtém-se um retângulo com altura $\frac{a\pi}{2}$, base $2a$ e área πa^2.

Finalmente, para se construir o quadrado de lado x com área igual a do retângulo da Figura 15 deve-se encontrar a média proporcional, ou geométrica, entre $2a$ e $\frac{a\pi}{2}$, ou seja, $x = \sqrt{a^2\pi}$, como na Seção 1.1.

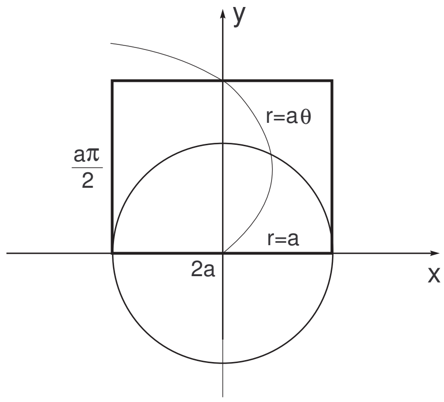

Figura 15: Quadratura do círculo com o uso da espiral de Arquimedes

5.1.2 A quadratura do círculo através do método de exaustão

Ao aperfeiçoar o método de exaustão de Eudoxo, Arquimedes apresentou uma outra maneira de se quadrar o círculo. Esse método se baseia na seguinte Proposição:

Proposição 5 *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que a sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade, e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor do que qualquer grandeza de mesma espécie.*

Para a prova dessa Proposição, por redução ao absurdo, Eudoxo se baseou no seguinte Axioma, hoje conhecido como Axioma de Eudoxo-Arquimedes:

Axioma 6 *Dadas duas grandezas diferentes A e B, de mesma espécie, e que tem uma razão, isto é, nenhuma delas sendo zero, pode-se encontrar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra, ou seja, existem números inteiros positivos m e n tais que $nA > B$ ou $mB > A$.*

Exemplo: Na Figura 16, pretende-se encontrar a área do círculo pelo método de exaustão. Nota-se que a área do triângulo em azul é maior que a metade da área do círculo. Os três triângulos em vermelho tem área maior do que a metade do que tinha sobrado. Continuando o processo, a área que ainda restar será menor do que uma grandeza de mesma espécie, fixada arbitrariamente. Assim a área do círculo será encontrada somando-se o triângulo em azul, com os três triângulos em vermelho, etc.

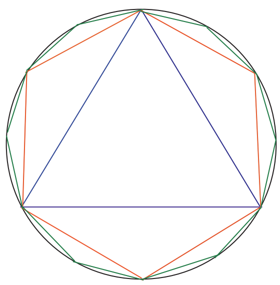

Figura 16: A área do círculo pelo método de exaustão

A Proposição anterior, equivale a seguinte formulação atual: considere M uma grandeza qualquer, ε outra grandeza, prefixada de mesma espécie, e r uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$. Então, pode-se encontrar um inteiro positivo N, tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Assim, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$.

Proposição 7 (Arquimedes) *A área de qualquer círculo é igual à área de um triângulo retângulo em que os catetos são iguais, respectivamente, ao raio e ao comprimento da circunferência do círculo.*

Demonstração: Considere um círculo de raio r, com o comprimento da circunferência c e área C. Considere também o triângulo retângulo de área $T = \frac{rc}{2}$.

Deve-se mostrar que $C = T$.

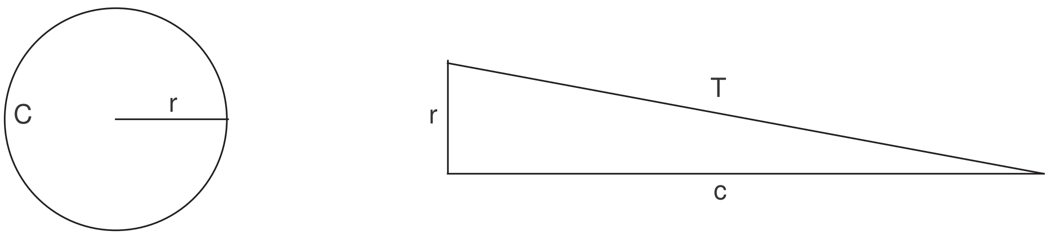

Figura 17: Equivalência entre as áreas do círculo e do triângulo retângulo

Para demonstrar esta Proposição, Arquimedes usou o processo de dupla redução ao absurdo, além do método de exaustão (Proposição 5). Para isso supôs primeiramente que $C > T$.

Seja $A = C - T > 0$. Considere um polígono regular inscrito de apótema m, perímetro p e área P, tal que $C - P < A$.

Desse modo, $C - P < A = C - T$, ou seja, $P > T$. Mas $P = \frac{pm}{2}$ e $T = \frac{cr}{2}$, logo, $pm > rc$, o que é um absurdo, pois $p < c$ e $m < r$.

Então,

$$C \leq T. \tag{5.1.1}$$

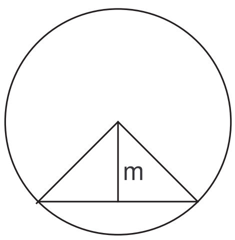

Figura 18: Aproximação da área do círculo por polígonos inscritos

Agora, suponha $C < T$. Seja $A = T - C > 0$ e considere um polígono regular circunscrito de apótema r, perímetro p' e área P', tal que $P' - C < A$.

Assim, $P' - C < A = T - C$, ou seja, $P' < T$, ou ainda, $\frac{rp'}{2} < \frac{rc}{2}$. Logo, $p' < c$, o que é um absurdo, pois $p' > c$.

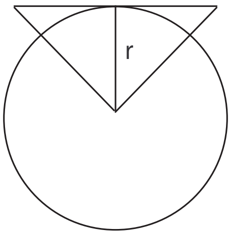

Figura 19: Aproximação da área do círculo por polígonos circunscritos

Então

$$C \geq T. \tag{5.1.2}$$

De (5.1.1) e (5.1.2), conclui-se que $C = T$. Para se concluir a quadratura do círculo procede-se como nas Seções 1.1 e 4.1. ■

Observação 8 *Arquimedes em seu trabalho "A medida do círculo", em que realizou a quadratura acima apresentada, provou ainda dois resultados importantes referentes ao valor de π. Para isso utilizou polígonos regulares, inscritos e circunscritos, de até 96 lados.*

1. *Se c é o comprimento da circunferência e d é o diâmetro, então*

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)d < c < \left(3+\frac{10}{70}\right)d, \text{ ou seja, } 3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}.$$

Em decimais, para cinco casas, temos a seguinte relação: $3,14084 < \pi < 3,142858$.

2. *A área do círculo está para o quadrado do seu diâmetro aproximadamente na razão* $\frac{11}{14}$.

5.2 Arquimedes e a trissecção do ângulo

5.2.1 A espiral de Arquimedes e a trissecção do ângulo

Considere o ângulo $\widehat{AOP}$. Divide-se o segmento OP em 3 partes iguais, obtendo-se os pontos R e S. Traça-se duas circunferências de centro O e raios OR e OS que interceptam a espiral nos pontos U e V. Pela construção da espiral, com $r = \theta$ concluí-se que as retas OU e OV trissectam o ângulo $\widehat{AOP}$.

5.2.2 A trissecção do ângulo por neusis

No seu chamado Livro de Lemas, encontra-se um exemplo de Trissecção do Ângulo, que envolve o que os gregos chamavam de neusis, isto é, a inserção de um comprimento dado, entre duas figuras, no caso $ST = BC$, entre a reta r e a circunferência.

Com centro em B, traça-se uma circunferência de raio qualquer. Seja $\alpha = A\widehat{B}C$ o ângulo a ser trissectado. Por A traça-se a reta STA, em que S está em r e T sobre a circunferência tal que $ST = BC = BA = BT$. Uma vez que os triângulos STB e TBA são isósceles, conclui-se que o ângulo $B\widehat{S}T$ é $\frac{\alpha}{3}$.

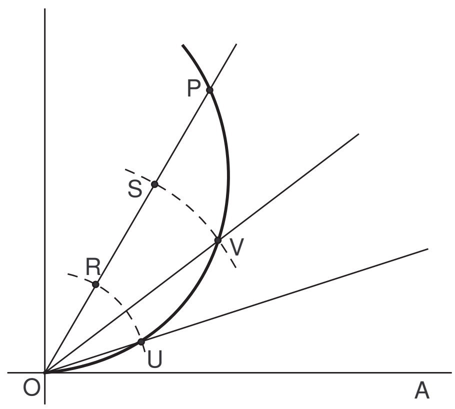

Figura 20: Trissecção do ângulo com o uso da espiral

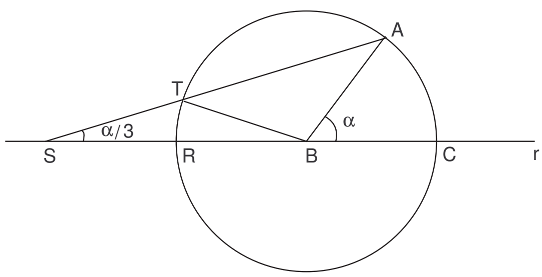

Figura 21: Trisecção do ângulo por neusis

Referências

[1] ALSINA, C. e NELSEN, R.B., *Charming proofs: a journey into elegant mathematics*, Mathematical Association of America, (2010).

[2] BARON, M. E., *A matemática grega*, Brasília: Editora Universidade de Brasília, (1985).

[3] BOLD, B., *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, New York: Dover Publications, Inc., (1982).

[4] BOYER, Carl, B., *História da Matemática*, 2. Ed., São Paulo: Edgard Blücher, (1996).

[5] CARVALHO, J. P., *Três Excursões pela História da Matemática*, Rio de Janeiro: Intermat,(2008).

[6] EDWARDS, C. H., *The Historical Development of Calculus*, New York: Springer- Verlag,(1979).

[7] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*, Campinas: Editora da UNICAMP, (1995).

[8] GARBI, G. G., *A rainha das ciências*, São Paulo: Editora Livraria da Física, (2006).

[9] KOPP, P. E., *Analysis*, Modular mathematical series, Elsevier, (1996).

[10] PEDROSO, H. A. e PRECIOSO, J. C. , *O Problema da Construção de Polígonos Regulares de Euclides a Gauss*, FAMAT em Revista, 13, (2009).

[11] PEDROSO, H. A. e PRECIOSO, J. C. , *Construções Euclidianas e o Desfecho de Problema Famosos da Geometria*, Revista Ciências Exatas e Naturais, vol. 13, 2, (2011).

[12] PUTNOKI, J. C. *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico*, São Paulo: Editora Scipione, (1989).

[13] ROQUE, T., *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, Rio de Janeiro: Zahar, (2012).