Desigualdades no Triângulo de Pascal

Antônio Luiz de Melo[1]

Rogério César dos Santos[2]

13 de março de 2014

Resumo

As proposições demonstradas em [2] têm por objetivo estabelecer por qual ponto de coordenadas inteiras passam mais caminhos, considerando uma malha quadricular de caminhos ligando um ponto a outro do plano cartesiano, ligação essa feita com segmentos indo da esquerda para a direita, ou de baixo para cima. O presente trabalho almeja apresentar, portanto, consequências interessantes deste problema, que podem ser visualizadas no Triângulo de Pascal, a respeito de seus elementos. São propriedades que envolvem desigualdades entre resultados de operações com seus elementos. Veremos também a generalização de uma destas proposições, também sob a ótica do Triângulo de Pascal.

Palavras chave: Triângulo de Pascal, Desigualdades

Abstract

The propositions stated in [2] aim establish whereby point of integer coordinates pass more paths, considering a quadricular mesh of paths linking one point to another of the cartesian plane, connection made with segments going from left to right, or bottom up. The present work aims therefore presents interesting consequences of this problem, that can be visualized in Pascal's Triangle, regarding its elements. Are properties that involve inequalities between results of operations with its elements. We will also see the generalization of one of these propositions, also from the perspective of Pascal's Triangle.

Keywords: Pascal's Triangle, Inequalities

[1] E-mail: almelo@unb.br. Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, UnB

[2] E-mail: professorrogeriocesar@gmail.com. Curso de Licenciatura em Ciências Naturais, UnB

Introdução

O trabalho em [1] traz uma experiência realizada em sala de aula, visando verificar como os alunos de uma determinada escola reagem ao serem questionados sobre a probabilidade de a personagem Mônica, das estórias em quadrinhos, visitar um certo colega, sorteando, a cada passo dado pelo caminho, se ela deverá seguir para a direita ou para cima. Ela parte de um ponto do plano, por exemplo, (0,0), e deseja visitar um de seus amigos que estão localizados nos pontos (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4). Ou seja, os tais amigos estariam localizados em uma diagonal. A cada ponto de coordenadas inteiras alcançado, ela para e faz o sorteio.

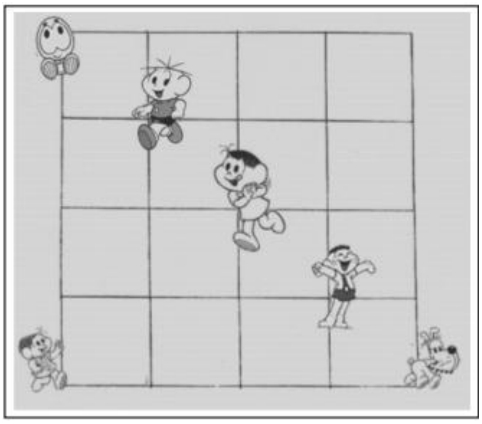

Figura 1: Passeio da Mônica (veja em [1])

No artigo, verificou-se que há mais caminhos até o ponto (2, 2). Logo, é este amigo que há a maior chance de ela visitar. Já em [2], o problema é semelhante, mas generaliza a questão, considerando os demais pontos do quadrado de vértices (0, 0), (*x*, 0), (*x*, *x*) e (0, *x*).

Uma das proposições demonstradas no artigo [2] referido acima declara que, sob a ótica do Triângulo de Pascal ilustrado abaixo, vale o seguinte resultado:

Propriedade A: Dados dois elementos A e B da coluna central, ou seja, daquela coluna constituída dos números binomiais do tipo $\binom{2k}{k}, k = 0,1,2, \ldots$, o produto deles é maior do que o produto de dois elementos C e D pertencentes às diagonais que passam por A e por B, que estejam simetricamente localizados em relação a A e a B. Por exemplo, no Triângulo abaixo com os valores em destaque, temos que: $20 \cdot 924$ é maior do que os seguintes produtos:

$$35 \cdot 462;\ 56 \cdot 210;\ 84^2; 120 \cdot 28;\ 165 \cdot 7; 220 \cdot 1; 10 \cdot 1.716;\ 4 \cdot 3.003 \text{ e } 1 \cdot 5.005:$$

															1															
														1		1														
													1		2		1													
												1		3		3		1												
											1		4		6		4		1											
										1		5		10		10		5		1										
									1		6		15		20		15		6		1									
								1		7		21		35		35		21		7		1								
							1		8		28		56		70		56		28		8		1							
						1		9		36		84		126		126		84		36		9		1						
					1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1					
				1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1				
			1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1			
		1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1287		715		286		78		13		1		
	1		14		91		364		1001		2002		3003		3432		3003		2002		1001		364		91	0			1	
1		15		105		455		1365		3003		5005		6435		6435		5005		3003		1365		455		91		1		1

Figura 2: A propriedade “A”

De fato, foi provado no artigo que, dado x = 1, 2, ..., N, então:

A) $\binom{2x}{x} \cdot \binom{2N-2x}{N-x} \geq \binom{2x-i}{x} \cdot \binom{2N-2x+i}{N-x}$, com i de 0 a x,

B) $\binom{2x}{x} \cdot \binom{2N-2x}{N-x} \geq \binom{2x+i}{x} \cdot \binom{2N-2x-i}{N-x}$, com i de 0 a $N - x$.

Fazendo $2N - 2x = 2p$, e observando a simetria do Triângulo, fica óbvia a interpretação dada. No nosso exemplo acima, $x = 3$ e $N = 9$.

Outra proposição demonstrada no artigo citado afirma que:

Propriedade B: na coluna central do Triângulo, o produto de dois de seus elementos é maior do que o produto de dois elementos pertencentes à mesma coluna central, localizados simetricamente entre eles. Em exemplos no triângulo abaixo, temos que: $1 \cdot 252 > 2 \cdot 70 > 6 \cdot 20$. Ou também, $2 \cdot 20 > 6^2$, conforme podemos verificar na ilustração com os valores em negrito:

											1											
										1		1										
									1		**2**		1									
								1		3		3		1								
							1		4		**6**		4		1							
						1		5		10		10		5		1						
					1		6		15		**20**		15		6		1					
				1		7		21		35		35		21		7		1				
			1		8		28		56		**70**		56		28		8		1			
		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		
	1		10		45		120		210		**252**		210		120		45		10		1	
1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1

Figura 3: A propriedade B

De fato, foi provado que, para N = 2, 3, 4, ..., vale

A) Se $0 \leq 2x < N$, então: $\binom{2x}{x} \cdot \binom{2N-2x}{N-x} \geq \binom{2x+2}{x+1} \cdot \binom{2N-2x-2}{N-x-1}$;

B) Se $N < 2x \leq 4N$, então: $\binom{2x}{x} \cdot \binom{2N-2x}{N-x} \geq \binom{2x-2}{x-1} \cdot \binom{2N-2x+2}{N-x+1}$

Chamando $2p = 2N - 2x$, a interpretação dada acima fica evidente, onde, no caso A, $2p > 2x$, e no caso B, $2p < 2x$.

Estas duas provas, conforme mostra o artigo, garantem que o ponto pelo qual passam mais caminhos, indo do (0, 0) até (x, x), é o ponto (1, 1), e, empatado com este, por simetria, o ponto ($x - 1$, $x - 1$).

Porém, será que a propriedade B referida acima vale também para as demais colunas do Triângulo? E mais, será que vale a desigualdade contrária em alguma coluna do Triângulo? Responderemos todas estas perguntas nos tópicos a seguir.

1 A Ideia de Generalizar Para Outras Colunas do Triângulo

Generalizando a proposição B anterior, vamos provar a seguir que a mesma propriedade que é válida para a coluna central, de que o produto de dois de seus elementos é maior do que o produto de dois elementos pertencentes a mesma coluna central localizados simetricamente entre os dois, também vale para a coluna cujos números binomiais são do tipo $\binom{2m+1}{m}, m = 0,1,2, ...$, ou seja, a coluna que contém os elementos $\binom{1}{0}, \binom{3}{1}$, $\binom{5}{2}$, etc, em destaque na próxima figura. Por simetria, também valerá para a coluna cujo primeiro elemento é $\binom{1}{1}$:

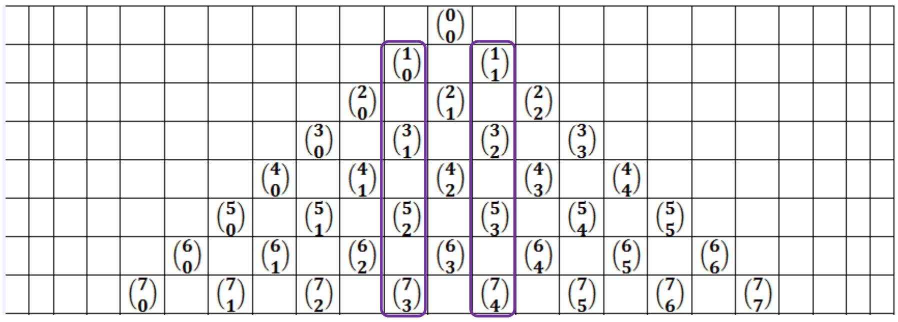

Figura 4: A propriedade B também vale para as colunas em destaque

Porém, nem tal desigualdade, e nem a sua contrária, valerão para quaisquer demais colunas do Triângulo, conforme veremos. Iremos dividir nossa demonstração em dois casos:

2 Caso Par

Seja a coluna cujos números binomiais são do tipo $\binom{2m}{m-k}, m \geq k \geq 0$, onde o número superior de $\binom{2m}{m-k}$ é par.

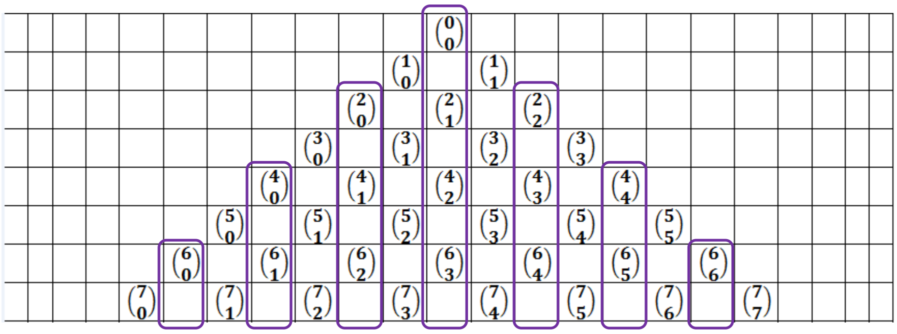

Figura 5: A propriedade B, no caso par, apenas vale para a coluna central

Para k = 0, temos a coluna que contém o $\binom{0}{0}$, onde já foi provada a validade da propriedade B no artigo citado, de fato a única no caso par em que ela é válida;

Para k = 1, temos a coluna que contém o $\binom{2}{0}$, $\binom{4}{1}$ etc.

Considere, portanto, a razão $Q_k = \frac{\binom{2m}{m-k}\binom{2p}{p-k}}{\binom{2(m+1)}{(m+1)-k}\binom{2(p-1)}{j}}, m \geq k \geq 0; p \geq m+2.$

Antes de analisar esta razão, precisamos saber qual é o valor de j tal que o número $\binom{2(p-1)}{j}$ esteja na mesma coluna do número $\binom{2p}{p-k}$. Ora, observe que, por exemplo, o número $\binom{4}{3}$ está na mesma coluna de $\binom{6}{4}$ e duas linhas acima deste, isto é, para cada duas linhas que se desloca na coluna para cima, diminui-se uma unidade na referência da coluna, no caso acima, de 4 para 3. Logo, o valor de j tal que os números $\binom{C}{j}$ e $\binom{A}{B}$ estão na mesma coluna é $j = B - \frac{A-C}{2}$, onde $C < A$. Sendo assim, $j = (p-k) - \frac{2p-[2(p-1)]}{2} = p-k-1$. Logo,

$$Q_k = \frac{\dfrac{(2m)!}{(m+k)!\,(m-k)!} \cdot \dfrac{(2p)!}{(p+k)!\,(p-k)!}}{\dfrac{(2m+2)!}{(m+1+k)!\,(m+1-k)!} \cdot \dfrac{(2p-2)!}{(p-1+k)!\,(p-1-k)!}}.$$

Simplificando,

$$Q_k = \frac{\dfrac{\cancel{(2m)!}}{\cancel{(m+k)!\,(m-k)!}} \cdot \dfrac{(2p)(2p-1)\cancel{(2p-2)!}}{(p+k)\cancel{(p+k-1)!}\,(p-k)\cancel{(p-k-1)!}}}{\dfrac{(2m+2)(2m+1)\cancel{(2m)!}}{(m+1+k)\cancel{(m+k)!}\,(m+1-k)\cancel{(m-k)!}} \cdot \dfrac{\cancel{(2p-2)!}}{\cancel{(p-1+k)!\,(p-1-k)!}}}$$

$$= \frac{2p(2p-1)(m+1+k)(m+1-k)}{(p+k)(p-k)2(m+1)(2m+1)},$$

isto é,

$$(i)\ Q_k = \frac{p(2p-1)(m+1+k)(m+1-k)}{(p+k)(p-k)(m+1)(2m+1)}.$$

Quando $k = 0$, temos:

$$Q_0 = \frac{p(2p-1)(m+1)^2}{p^2(m+1)(2m+1)} = \frac{(2p-1)(m+1)}{p(2m+1)} =$$

$$\frac{2pm+2p-m-1}{2pm+p} = 1 + \frac{p-(m+1)}{2pm+p} > 1, \forall\, m \geq k, p \geq m+2.$$

Por indução sobre m, segue o resultado. Porém, este é o fato que já sabíamos, de que vale a propriedade B quando $k = 0$.

a) Para $k > 0$, sejam $m = k$ e $p = m^3 + m^2 + 1$. Vamos mostrar que essa escolha fornece um contraexemplo para a propriedade B. Então, substituindo em (i),

$$Q_k = \frac{(k^3+k^2+1)(2k^3+2k^2+1)(2k+1)}{([k^3+k^2+1)^2-k^2](k+1)(2k+1)}$$

Usando o software livre MAXIMA, os polinômios acima são multiplicados e chegamos à expressão:

$$Q_k = \frac{2k^6+4k^5+2k^4+3k^3+3k^2+1}{k^7+3k^6+3k^5+3k^4+3k^3+k^2+k+1},$$

logo,

$$0 < Q_k = 1 - \frac{k^7+k^6-k^5+k^4-2k^2+k+k}{k^7+3k^6+3k^5+3k^4+3k^3+k^2+k+1} < 1,$$

pois $k \geq 1$. Ou seja, em cada $k > 0$, nessas linhas $2m$ e $2p$ especificadas, $Q_k < 1$. Logo, a propriedade B não vale nas colunas cujos elementos são do tipo par: $\binom{2m}{m-k}$.

Mas, será que vale a desigualdade inversa da propriedade B?

b) Ainda para $k > 0$, sejam agora $m = 2k^2 + k - 1$ e $p = 4k^3 + 2k^2$, então, substituindo em (i):

$$Q_k = \frac{(4k^3 + 2k^2)(8k^3 + 4k^2 - 1)(2k^2 + 2k)(2k^2)}{(4k^3 + 2k^2 + k)(4k^3 + 2k^2 - k)(2k^2 + k)(4k^2 + 2k - 1)}.$$

Usando novamente o MAXIMA,

$$Q_k = \frac{128k^{10} + 256k^9 + 160k^8 + 16k^7 - 24k^6 - 8k^5}{128k^{10} + 256k^9 + 160k^8 + 16k^7 - 24k^6 - 12k^5 + k^3},$$

$$Q_k = 1 + \frac{4k^5 - k^3}{128k^{10} + 256k^9 + 160k^8 + 16k^7 - 24k^6 - 12k^5 + k^3} > 1.$$

Ou seja, em cada $k > 0$, nessas linhas $2m$ e $2p$ especificadas, $Q_k > 1$.

Enfim, para cada $k > 0$, no caso par, não vale a desigualdade e nem a sua oposta.

3 Caso Ímpar

Seja a coluna cujo primeiro termo tem a forma $\binom{2n+1}{0}, n \in N$. Nessas colunas, o termo geral tem a forma $\binom{2m+1}{m-k}, m \geq k \geq 0$.

Quando $k = 0$, tem-se a coluna que contém o termo $\binom{1}{0}$, e nesta vamos verificar que a propriedade B vale, ao contrário do que acontece nas demais colunas, ou seja, para os demais valores de k.

De fato, considere o quociente

$$Q_k = \frac{\binom{2m+1}{m-k}\binom{2p+1}{p-k}}{\binom{2(m+1)+1}{(m+1)-k}\binom{2(p-1)+1}{p-k-1}}, m \geq k \geq 0, p \geq m+2,$$

isto é,

$$Q_k = \frac{\frac{(2m+1)!}{(m-k)!\,(m+1+k)!} \cdot \frac{(2p+1)!}{(p-k)!\,(p+1+k)!}}{\frac{(2m+3)!}{(m+1-k)!\,(m+2+k)!} \cdot \frac{(2p-1)!}{(p-k-1)!\,(p+k)!}}.$$

Simplificando,

$$Q_k = \frac{\dfrac{\cancel{(2m+1)!}}{\cancel{(m-k)!}\,\cancel{(m+1+k)!}} \cdot \dfrac{(2p+1)2p\cancel{(2p-1)!}}{(p-k)\cancel{(p-k-1)!}\,(p+1+k)\cancel{(p+k)!}}}{\dfrac{(2m+3)(2m+2)\cancel{(2m+1)!}}{(m+1-k)\cancel{(m-k)!}\,(m+2+k)\cancel{(m+1+k)!}} \cdot \dfrac{\cancel{(2p-1)!}}{\cancel{(p-k-1)!}\,\cancel{(p+k)!}}} =$$

$$(ii)\ Q_k = \frac{\cancel{2}p(2p+1)(m+1-k)(m+2+k)}{(p-k)(p+1+k)(2m+3)\cancel{2}(m+1)}.$$

Quando $k = 0$, temos:

$$Q_0 = \frac{p(2p+1)(m+1)(m+2)}{p(p+1)(2m+3)(m+1)} = \frac{(2p+1)(m+2)}{(p+1)(2m+3)} =$$

$$\frac{2pm+4p+m+2}{2pm+3p+2m+3} = 1 + \frac{p-m-1}{2pm+3p+2m+3} > 1,$$

pois $p \geq m+2$. Então, para esta coluna e sua simétrica, destacadas abaixo, vale a propriedade B.

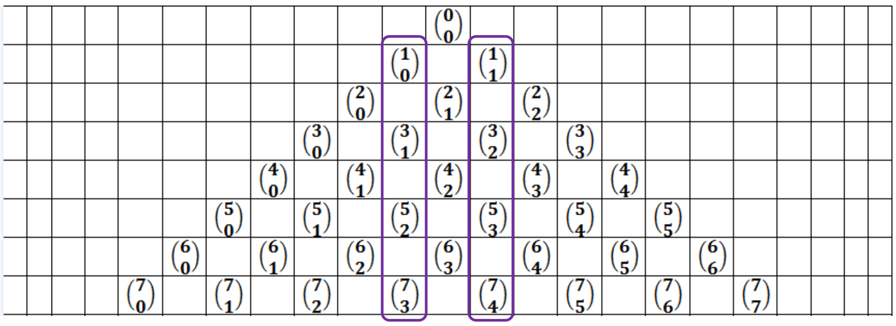

Figura 6: A propriedade B vale também para as colunas em destaque.

Quando $k = 1$, temos, substituindo em (*ii*),

$$Q_1 = \frac{p(2p+1)m(m+3)}{(p-1)(p+2)(2m+3)(m+1)}$$

Se $m = 1$ e $p = 3$ então $Q_1 = \frac{21}{25} < 1$.

Se $m = 7$ e $p = 9$ então $Q_1 = \frac{5.985}{5.984} > 1$. Logo, nesta coluna não vale a propriedade B, nem a sua inversa.

Suponha $k \geq 2$.

1) Para $m = k$ e $p = k + 2$, em (ii):

$$0 < Q_k = \frac{2k^2 + 9k + 10}{4k^2 + 12k + 9} = 1 - \frac{2k^2 + 3k - 1}{4k^2 + 12k + 9} < 1,$$

2) Para $m = 10k^2$ e $p = 10k^3$ em (ii), Q_k vale:

$$Q_k = \frac{A_k}{Bk},$$

onde $A_k = 20.000k^{10} + 5.800k^8 + 800k^7 + 400\,k^6 + 290k^5 + 20k^3 - 10k^4$ e

$$B_k = 20.000k^{10} + 5.000k^8 + 2.000k^7 + 100k^6 + 300k^5 - 50k^4 - 20k^3 - 3k^2 - 3k,$$

de modo que

$A_k - B_k = (800k^8 - 1.200k^7) + (300k^6 - 10k^5) + 40k^4 + 40k^3 + 3k^2 + 3k >$ $(1.600k^7 - 1.200k^7) + (600k^5 - 10k^5) > 0$, isto é, $Q_k > 1$.

Portanto, por 1) e por 2), vemos que nem a propriedade B, nem a sua inversa, valem para as demais colunas ímpares.

Conclusão

A propriedade B vale, portanto, apenas para as 3 colunas centrais do Triângulo. Nem a propriedade B, nem a sua inversa, valem para as demais colunas.

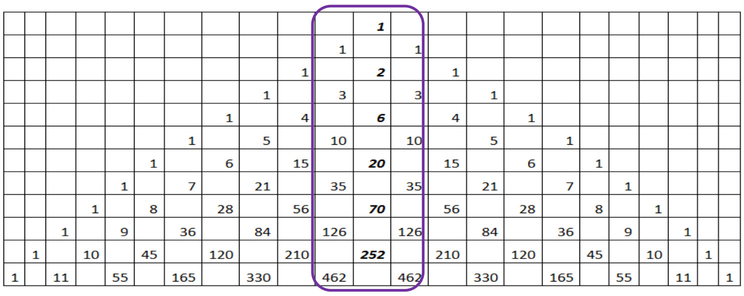

Figura 7: As únicas colunas que satisfazem a propriedade B

Este fato, mais a propriedade A, são, portanto, novas propriedades do Triângulo de Pascal, propriedades estas que envolvem desigualdades. É sabido da Educação Básica que o Triângulo possui várias outras relações interessantes envolvendo somas e padrões de sequências. A apresentação de todas estas propriedades pode vir a ser útil ao ensino de Matemática, no sentido de despertar no aluno dos Ensinos Médio ou Superior a curiosidade, o gosto pela disciplina, e quiçá o incentivo à pesquisa.

Referências

[1] NAGAMINE, C. M. L; HENRIQUES, A.; UTSUMI, M. C.; CAZORLA, I.. M. *Análise Praxeológica dos Passeios Aleatórios da Mônica.* São Paulo: Bolema, 2011.

[2] SANTOS, R. C.; CASTILHO, J. E. *O Problema do Ponto Mais Visitado.* Revista do Professor de Matemática – RPM – São Paulo: SBM, 2013.