

# Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição

Hermes A. Pedroso \*      Juliana C. Precioso †

7 de julho de 2014

## Resumo

O objetivo deste trabalho é resgatar um pouco da rica história do estudo da cicloide. Para isso, serão mostrados inicialmente os passos da sua construção, as deduções de suas equações polares e cartesianas que, a seguir, serão utilizadas nos cálculos da área sob um arco dessa curva, da reta tangente, bem como, do comprimento desse arco.

Serão reconstituídas etapas das aplicações da cicloide nos casos do pêndulo de Huygens, em que ela se comporta como isócrona (mesmo tempo) e do problema da braquistócrona (tempo mínimo) que desafiaram os grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII, com destaque para Huygens e os irmãos Jakob e Johann Bernoulli.

**Palavras Chave:** cicloide, isócrona, braquistócrona.

## Introdução

A cicloide foi percebida pela primeira vez por Charles Bovelles (1479-1566), que num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501, se refere a essa curva ligando-a com o problema da quadratura do círculo. Os primeiros estudos rigorosos que se tem conhecimento são devidos a Giles Person de Roberval (1602-1675) que a chamou de “trochóide” (roda em grego), a Blaise Pascal (1623-1662) que a chamou de “roulette” e a Evangelista Toricelli (1608-1647), um discípulo de Galileu Galilei (1564-1642). O próprio Galileu Galilei também estudou a curva tendo inclusive a chamado de cicloide e referiu-se a sua forma graciosa, apontando-a como sugestão para o perfil dos arcos de construções em arquitetura. Provou, pesando modelos de papel, que a área sob a curva é três vezes a área do círculo gerador. Utilizando o método dos indivisíveis, esse resultado foi provado posteriormente por Toricelli que foi acusado de plágio por Roberval; fato que pode ter sido a razão de sua morte prematura.

Vincenzo Viviani, outro brilhante aluno de Galileu, obteve a reta tangente a cicloide, resultado também alcançado na França por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Sobre o comprimento de um arco de cicloide, destacam-se os trabalhos de Christopher Wren (1632-1723) um famoso arquiteto inglês que projetou 51 igrejas em Londres, incluindo a Catedral de São Paulo e os de Roberval que provou que o comprimento desse arco é oito vezes o raio do círculo gerador.

---

\*Email: hermes@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP

†Email: preciosos@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP



Figura 1: Da esquerda para a direita: Pascal, Roberval, Galileu e Torricelli.

Christiaan Huygens (1629-1695) mostrou, por volta de 1673, que o tempo gasto por uma partícula para chegar a um nível inferior, partindo do repouso e deslizando, sem atrito, sob a ação da gravidade em um arco invertido de cicloide, independe do ponto de partida (isocronismo). Esse resultado o levou a construir o relógio de pêndulo, que oscila entre dois ramos de uma cicloide, o que faz com que o período seja sempre o mesmo, independente da amplitude das oscilações.

Algum tempo depois, a cicloide apareceria como solução de outro importante problema da ciência do final do século XVII, conhecido como braquistócrona ou do tempo mínimo. Em 1696 Johann Bernoulli lançou esse problema como desafio aos matemáticos na *Acta Eruditorum* da seguinte maneira: suponha que dois pregos sejam martelados ao acaso em uma parede (não na mesma vertical), e que o prego superior seja conectado ao inferior por um arame flexível na forma de uma curva lisa. Qual a forma do arame no qual uma partícula deslizará (sem atrito) sob influência da gravidade, para passar do prego superior ao inferior no menor tempo possível?

De imediato a questão despertou um grande interesse e logo foi resolvida, por Isaac Newton (1642-1727), por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), por Jakob Bernoulli (1654-1705), irmão mais velho de Johann e por ele próprio. Fato curioso é que na sua solução Johann usou uma analogia com a refração da luz, demonstrando grande engenhosidade ao relacionar temas que aparentemente eram bem distintos. O problema da braquistócrona foi marcante porque apontou uma linha de pesquisa, importantíssima, chamada de cálculo das variações e que trata do estudo de funcionais ou de funções que dependem de outras funções ou curvas.

Para mais referências sobre o assunto abordado nesse trabalho, veja, por exemplo, [1], [2], [3], [8] e [12].

## 1 Construções da cicloide e de suas retas tangente e normal

**Definição 1** *Chama-se cicloide uma curva plana descrita por um ponto de uma circunferência que rola, sem deslizamento, sobre uma reta. Esse ponto é chamado de gerador, a circunferência de geradora e a reta de diretriz da cicloide.*

A construção da cicloide, a exemplo das cônicas, será feita por pontos por se tratar de uma curva não construtível com régua e compasso. A construção que será apresentada baseia-se em [10].

Para se compreender tal construção, imagine que ao longo do período em que a circunferência geradora completa uma volta, sejam registrados flashes do seu movimento, identificando algumas posições do ponto  $P$  gerador.

Nas figuras seguintes, o comprimento do segmento  $PQ$  é igual ao comprimento da circunferência geradora. Além disso, tanto  $PQ$  quanto a circunferência estão divididos em oito partes iguais.

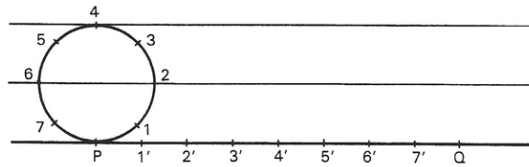


Figura 2: Primeiramente, observe que, conforme a circunferência geradora rola sobre a diretriz, o ponto 1 cai em 1', 2 em 2', 3 em 3', etc.

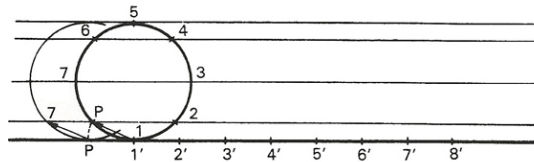


Figura 3: Quando o ponto 1 passa para a posição 1', o ponto P vai para a posição em que se encontrava o ponto 7 na situação inicial.

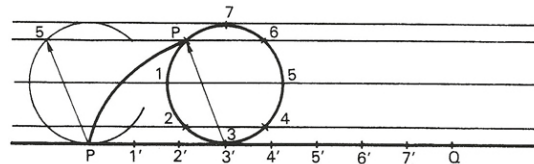


Figura 4: Quando o ponto 3 passa para a posição 3', o ponto P vai para a posição em que se encontrava o ponto 5 na situação inicial.

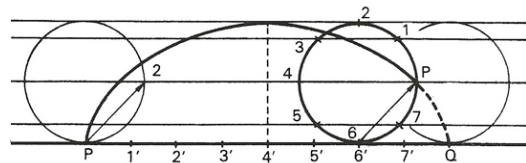


Figura 5: Quando o ponto 6 passa para a posição 6', o ponto P vai para a posição em que se encontrava o ponto 2 na situação inicial.

A partir das figuras acima, podemos visualizar a sua construção. Será necessário realizar a retificação da circunferência geradora e para tanto utilizaremos o processo devido a Arquimedes (287 - 212 a.C.) que se encontra em um dos seus famosos trabalhos denominado *A medida do círculo* e que consiste em atribuir o valor  $\frac{22}{7}$  para  $\pi$ .

Vamos supor que o ponto gerador seja o ponto  $P$ , em que a circunferência geradora, denotada por  $\mathcal{C}$ , tangencia a diretriz na posição inicial.

Determina-se o ponto  $Q$  sobre a diretriz, de modo que  $PQ$  seja a retificação de  $\mathcal{C}$ , ou seja,  $PQ$  é um segmento cujo comprimento é o mesmo de  $\mathcal{C}$  que é igual a  $2\pi r = d\pi \simeq d\frac{22}{7} = 3d + \frac{d}{7}$ . Ver Figura 6.

Divide-se  $PQ$  e  $\mathcal{C}$  em um mesmo número de partes iguais. Por exemplo, 8 partes. Para se obter maior precisão no traçado, pode-se dividir  $PQ$  e  $\mathcal{C}$  em um número maior de partes iguais.

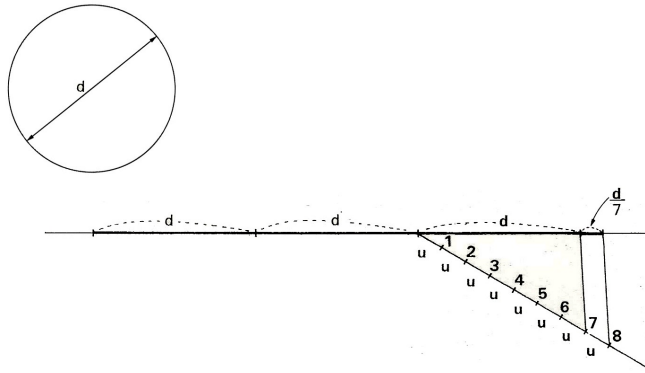


Figura 6: Retificação da circunferência pelo processo de Arquimedes

Pelos pontos de divisão de  $C$ , traça-se as retas  $s_1, s_2, s_3$  e  $s_4$  paralelas a diretriz.

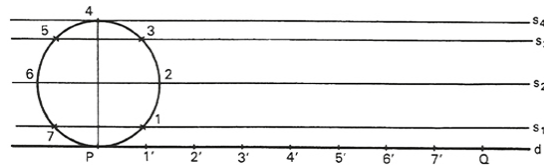


Figura 7:

Com raio  $P7$  (ou  $P1$ ) e centros em  $1'$  e  $7'$ , traça-se arcos que determinam em  $s_1$  dois pontos da cicloide.

Com raio  $P6$  (ou  $P2$ ) e centros em  $2'$  e  $6'$ , traça-se arcos que determinam em  $s_2$  mais dois pontos.

Com raio  $P5$  (ou  $P3$ ) e centros em  $3'$  e  $5'$ , traça-se arcos que determinam em  $s_3$  mais dois pontos.

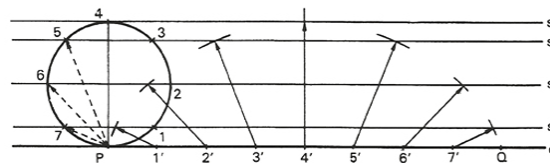


Figura 8:

Por fim, determina-se em  $s_4$  mais um ponto da cicloide, traçando-se por  $4'$  uma perpendicular a diretriz. Unindo-se de modo conveniente os pontos determinados obtém-se a cicloide.

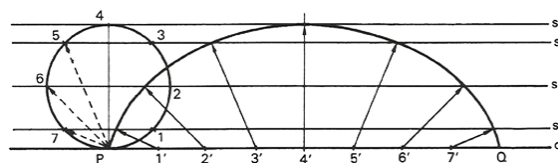


Figura 9:

Passaremos agora à construção da tangente e da normal a uma cicloide por um ponto  $S$ .

Por  $S$  traça-se uma paralela à diretriz determinando o ponto  $S'$  em  $\mathcal{C}$ .

Seja  $T$  o ponto de tangência de  $\mathcal{C}$  com a diretriz. Traça-se por  $S$  a reta  $n$  paralela à reta  $S'T$ .

Por  $S$  traça-se a reta  $t$  perpendicular a  $n$ .

As retas  $t$  e  $n$  são, respectivamente, a tangente e a normal à cicloide no ponto  $S$ .

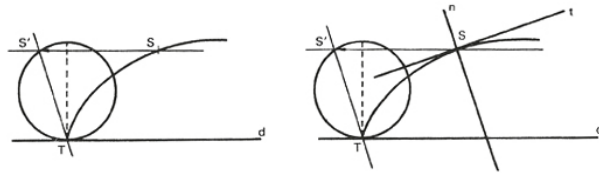


Figura 10: Retas tangente e normal à cicloide no ponto  $S$ .

## 2 Equações polares e cartesianas

Dado um sistema de coordenadas  $Oxy$ , a cicloide é o lugar geométrico descrito pelo ponto  $P$  da circunferência geradora, de raio  $a$  e centro  $C$  e que rola sobre o eixo  $x$ . O ponto inicial ocorre na posição em que  $C$  está no semi-eixo positivo dos  $y$ .

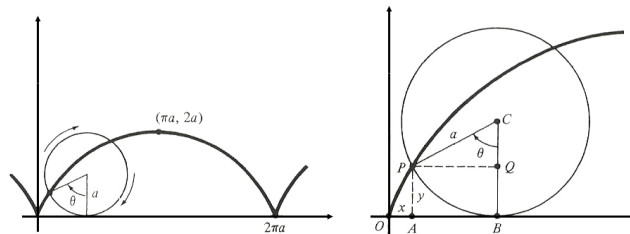


Figura 11:

O ângulo  $\theta$ , ver Figura 11, é o ângulo varrido pelo raio  $CP$  quando a circunferência rola para uma nova posição. Se  $x$  e  $y$  são as coordenadas de  $P$ , então, considerando esse movimento, como  $OB = \text{arco } BP = a\theta$ , tem-se

$$x = OA = OB - AB = OB - PQ = a\theta - a \sin \theta = a(\theta - \sin \theta)$$

e

$$y = AP = BC - QC = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta).$$

Portanto, as equações polares da cicloide são:

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta). \quad (2.0.1)$$

Nas equações (2.0.1) é possível eliminar  $\theta$  para se obter a equação cartesiana da cicloide,  $x = f(y)$ . De fato, da segunda equação, tem-se

$$\cos \theta = 1 - \frac{y}{a}, \quad \text{ou seja, } \theta = \arccos \left( 1 - \frac{y}{a} \right).$$

Logo,

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \frac{\sqrt{(2a - y)y}}{a}.$$

Portanto,

$$x = a \arccos \left( 1 - \frac{y}{a} \right) \mp \sqrt{(2a - y)y} = f(y),$$

que é a equação cartesiana da cicloide.

Essa equação é de pouca utilidade, uma vez que é muito mais fácil visualizar a curva pela descrição do movimento de  $P$  e estudar esse movimento pelas suas equações polares, que são, por assim dizer, as equações naturais da cicloide.

### 3 Cálculo da área sob um arco da curva, comprimento desse arco e propriedade da tangente

**Proposição 2** *A área sob um arco da cicloide é três vezes a área do círculo gerador.*

**Demonstração:** Consideremos o arco traçado, desde a origem, quando a circunferência perfaz uma revolução completa. Uma vez que  $y$  é uma função de  $x$ , ver Figura 11, a área pode ser escrita da seguinte forma

$$A = \int_0^{2\pi a} y \, dx.$$

Pelas equações da cicloide (2.0.1), pode-se fazer a mudança de variáveis  $x = a(\theta - \sin \theta)$  para o cálculo dessa integral. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} ya(1 - \cos \theta) \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

■

**Proposição 3** *O comprimento de um arco da cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo gerador.*

**Demonstração:** Para o cálculo do comprimento de um arco, as equações da cicloide

$$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = a(1 - \cos \theta)$$

comportam-se como suas equações paramétricas, no parâmetro  $\theta$ , em que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Logo, o comprimento de arco é dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1 - \cos \theta))^2 + (a \sin \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Usando a identidade  $\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ , tem-se  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ . Assim,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 \left( 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \left[ -4a \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 4(2a) \\ &= 8a. \end{aligned}$$

■

**Proposição 4** *A reta tangente à cicloide num ponto  $P$  qualquer passa pelo topo do círculo gerador.*

**Demonstração:** Para a demonstração desse resultado, usaremos o coeficiente angular da reta tangente no ponto  $P = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$ , o qual é dado por

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \theta d\theta}{a(1 - \cos \theta)d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}. \quad (3.0.2)$$

Pode-se observar que  $y'$  não está definido para  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , pois nesses pontos a tangente é vertical. Esses valores de  $\theta$  correspondem aos pontos em que a cicloide toca o eixo  $x$ , pontos esses chamados de cúspides.

Seja  $r$  a reta tangente à cicloide passando por  $P$ . Uma vez que o ponto no topo do círculo gerador tem coordenadas  $(a\theta, 2a)$  e o coeficiente angular de  $r$  é como em (3.0.2), a equação de  $r$  é dada por

$$y - a(1 - \cos \theta) = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} (x - a\theta + a \sin \theta).$$

Substituindo  $x = a\theta$  na equação anterior, tem-se

$$y = a(1 - \cos \theta) + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} a \sin \theta = \frac{a(1 - \cos \theta)^2 + a \sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 2a.$$

Portanto, a reta tangente à cicloide por  $P$  passa, de fato, pelo ponto  $(a\theta, 2a)$  no topo do círculo gerador. ■

## 4 O pêndulo simples

A discussão apresentada nessa seção baseia-se em [5], [7] e [11].

O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa  $m$  fixada na extremidade inferior de um fio inextensível (idealmente sem massa) de comprimento  $l$ , cuja extremidade superior está fixada. Supõe-se que o movimento se dê em um plano vertical e designa-se por  $\theta$  o ângulo formado pelo fio e a vertical.

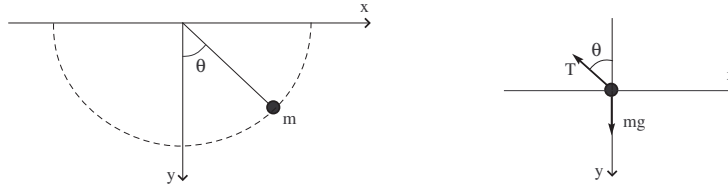


Figura 12: Pêndulo Simples

As forças que atuam no corpo de massa  $m$  são a tensão  $T$  do fio e a força vertical  $mg$  devido a gravidade. A segunda lei de Newton nos fornece as equações:

$$mx'' = -T \sin \theta \quad \text{e} \quad my'' = mg - T \cos \theta,$$

ou seja,

$$-T = \frac{mx''}{\sin \theta} \quad \text{e} \quad -T = \frac{m(y'' - g)}{\cos \theta},$$

donde conclui-se que

$$x'' \cos \theta - y'' \sin \theta = -g \sin \theta. \quad (4.0.3)$$

Uma vez que  $x = l \sin \theta$  e  $y = l \cos \theta$ , obtém-se

$$x'' = -l(\sin \theta)(\theta')^2 + l(\cos \theta)\theta'' \quad \text{e} \quad y'' = -l(\cos \theta)(\theta')^2 - l(\sin \theta)\theta''.$$

Logo, de (4.0.3), obtém-se a equação do pêndulo

$$l\theta'' + g \sin \theta = 0,$$

que é uma equação diferencial não linear de 2ª ordem.

### 4.1 O período do pêndulo simples nas pequenas oscilações

No caso de pequenas oscilações do pêndulo é possível fazer a aproximação  $\sin \theta \sim \theta$ . Logo, a equação do pêndulo torna-se

$$l\theta'' + g\theta = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \theta'' + \omega^2\theta = 0,$$

em que  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ .

A equação característica associada é  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ , a qual tem raízes complexas  $\lambda_1 = i\omega$  e  $\lambda_2 = -i\omega$ . Logo,  $\varphi(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$  é uma solução a valores complexos de  $\theta'' + \omega^2\theta = 0$ .

Essa solução dá origem às seguintes soluções reais linearmente independentes

$$\theta_1(t) = \cos \omega t \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = \sin \omega t,$$



as quais formam uma base para o espaço de soluções. Assim,

$$\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

é a solução geral.

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial da partícula  $\theta(0) = \theta_0$  e sua velocidade inicial  $\theta'(0) = v_0$ . Assim,  $c_1 = \theta_0$  e  $c_2 = \frac{v_0}{\omega}$  e, portanto,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = A \cos(\omega t - \phi), \quad (4.1.1)$$

em que  $A$  e  $\phi$  são dados por

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \cos \phi = \frac{\theta_0}{A} \quad \text{e} \quad \sin \phi = \frac{v_0}{A\omega},$$

com  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Isso se deve ao fato de que sendo  $A$  a amplitude máxima do movimento oscilatório, em torno da posição  $\theta = 0$ , tem-se por (4.1.1) que o máximo de  $|\theta(t)|$  ocorre quando  $A \cos(\omega t - \phi)$  é máximo, ou seja, quando  $|\cos(\omega t - \phi)| = 1$ .

Considere primeiramente  $\cos(\omega t - \phi) = 1$ . Logo,  $\omega t - \phi = 0$ , ou seja,  $t = \frac{\phi}{\omega}$ . Substituindo esse valor em (4.1.1), tem-se

$$\theta\left(\frac{\phi}{\omega}\right) = \theta_0 \cos \phi + \frac{v_0}{\omega} \sin \phi = A.$$

Uma vez que  $\theta(0) = \theta_0 = A \cos(-\phi) = A \cos \phi$ , tem-se

$$\begin{aligned} A = \theta_0 \cos \phi + \frac{v_0}{\omega} \sin \phi &\Rightarrow A = A \cos \phi \cos \phi + \frac{v_0}{\omega} \sin \phi \\ &\Rightarrow A \sin^2 \phi = \frac{v_0}{\omega} \sin \phi \\ &\Rightarrow A \sin \phi = \frac{v_0}{\omega}, \quad (\text{pois } \phi \neq 0) \\ &\Rightarrow \sin \phi = \frac{v_0}{A\omega}. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de  $\cos \phi$  e  $\sin \phi$  em  $A = \theta_0 \cos \phi + \frac{v_0}{\omega} \sin \phi$ , obtém-se

$$\begin{aligned} A = \theta_0 \frac{\theta_0}{A} + \frac{v_0}{\omega} \frac{v_0}{A\omega} &\Rightarrow A^2 = \theta_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \\ &\Rightarrow A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}. \end{aligned}$$

O mesmo resultado pode ser obtido quando se considera  $\cos(\omega t - \phi) = -1$ .

Em (4.1.1), o período da função cosseno dado por  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  é o período do movimento, ou seja, é o tempo necessário para uma oscilação completa. Desse modo, vemos que o período das oscilações de um pêndulo simples é  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Isso mostra que o período independe da amplitude  $\theta_0$ , fato observado por Galileu e denominado o isocronismo das pequenas oscilações.

## 4.2 O período do pêndulo simples nas grandes oscilações

Suponhamos que em  $t = 0$  o pêndulo é deslocado por um ângulo  $\theta_0 > 0$  e a seguir abandonado, começando assim o movimento. Logo,  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta'(0) = 0$ .

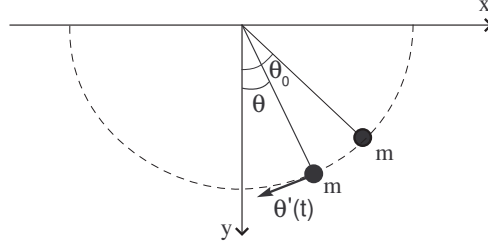


Figura 13: Pêndulo Simples

Note que multiplicando a equação do pêndulo  $\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$  por  $\theta'$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \theta' \theta'' + \omega^2 (\sin \theta) \theta' = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (\theta')^2 - \omega^2 \cos \theta \right] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} (\theta')^2 - \omega^2 \cos \theta = c, \end{aligned}$$

em que  $c$  pode ser obtida à partir dos valores de  $\theta$  e  $\theta'$  em um dado instante  $t_0$ .

Daí, como  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta'(0) = 0$ , tem-se  $c = -\omega^2 \cos \theta_0$ .

Logo,  $\frac{1}{2} (\theta')^2 - \omega^2 \cos \theta = -\omega^2 \cos \theta_0$ , o que implica que  $(\theta')^2 = 2\omega^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)$ , ou seja,

$$\theta' = \pm \sqrt{2\omega} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}. \quad (4.2.1)$$

Para encontrar o período do movimento oscilatório em função do deslocamento do pêndulo, conforme a Figura 13, considera-se um quarto desse período, e assim,  $\theta$  variando de  $\theta(0) = \theta_0$  a  $\theta(\frac{T}{4}) = 0$  e  $\theta'(t)$  é negativa. Considerando-se a diferencial de  $\theta$ ,  $d\theta = \theta'(t)dt$ , tem-se  $d\theta = -\sqrt{2\omega} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} dt$ , e desse modo,

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = -\sqrt{2\omega} dt. \quad (4.2.2)$$

Integrando-se (4.2.2), obtém-se

$$-\frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_0 &= \cos \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2} \right) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta_0}{2} + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \\ &= 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \\ &= 2 \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned}$$

tem-se

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} d\theta.$$

Fazendo a mudança de variável  $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin u$ , tem-se para  $\theta = 0$ ,  $u = 0$  e para  $\theta = \theta_0$ ,  $u = \frac{\pi}{2}$  e  $d\theta = 2 \frac{\sin \frac{\theta_0}{2} \cos u}{\cos \frac{\theta}{2}} du$ . Logo,

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} du = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du, \quad (4.2.3)$$

em que  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ .

Desse modo, para se determinar o período do pêndulo é necessário calcular uma integral que não pode ser resolvida em termos de funções elementares, porém, pode-se obter aproximações usando o desenvolvimento em séries.

Considere o desenvolvimento binomial de Newton

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

que converge se  $|x| < 1$ .

Fazendo  $x = -k^2 \sin^2 u$ , em que  $|k^2 \sin^2 u| < 1$  e  $p = -\frac{1}{2}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}(-k^2 \sin^2 u) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (-k^2 \sin^2 u)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) (-k^2 \sin^2 u)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 u + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} k^4 \sin^4 u + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} k^6 \sin^6 u + \dots \end{aligned}$$

A série acima é convergente e pode ser integrada termo a termo. Com objetivo de obter as integrais das potências dos senos de forma recursiva, considera-se um número natural par  $m$  da forma  $m = 2n$  e escreve-se

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \, du. \quad (4.2.4)$$

Note que

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} u \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \sin^2 u \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u (1 - \cos^2 u) \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \, du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^2 u \, du \\ &= I_m - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^2 u \, du, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^2 u \, du = I_m - I_{m+2}. \quad (4.2.5)$$

Por outro lado, por integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^2 u \, du &= \sin^m u \cos u \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u (m \sin^{m-1} u \cos^2 u - \sin^{m+1} u) \, du \\ &= 0 - m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^2 u \, du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} u \, du,\end{aligned}$$

donde segue que

$$(m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m u \cos^2 u \, du = I_{m+2}. \quad (4.2.6)$$

Substituindo (4.2.5) em (4.2.6), tem-se

$$(m+1)(I_m - I_{m+2}) = I_{m+2},$$

ou seja,

$$I_{m+2} = \frac{1+m}{2+m} I_m. \quad (4.2.7)$$

Uma vez que  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}$ , podemos escrever recursivamente:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \right),$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right),$$

$$I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} I_0 = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \right).$$

Desta forma, obtém-se

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} \, du = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right)^2 k^4 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \right)^2 k^6 + \dots$$

Portanto, substituindo em (4.2.3), obtém-se

$$\begin{aligned}T &= \frac{4}{\omega} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right)^2 k^4 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (4.2.8) \\ &= \frac{2\pi}{\omega} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \left( \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \right)^2 \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right],\end{aligned}$$

que é a expressão correta para o período do pêndulo, o que mostra sua dependência da amplitude.

Para constatar tal dependência, consideraremos a aproximação da série (4.2.9),  $T = \frac{2\pi}{\omega} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left( \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \right]$ , e a partir dela faremos uma tabela para alguns valores de  $\theta_0$ , com  $\pi = 3,1415$  e  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , em que  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $l = 1 \text{ m}$ .

$\theta_0$	T
0	2.007030773
$\frac{\pi}{360}$	2.007040325
$\frac{\pi}{180}$	2.007068983
$\frac{\pi}{36}$	2.007986408
$\frac{\pi}{18}$	2.010858246
$\frac{\pi}{12}$	2.015660675
$\frac{\pi}{6}$	2.041906571
$\frac{\pi}{4}$	2.086559763
$\frac{\pi}{3}$	2.150101518
$\frac{\pi}{2}$	2.328451135

Observa-se que para  $\theta_0 = 0$  o período  $T = 2.007030773$  é o valor aproximado para pequenas oscilações, ou seja,  $\theta_0 \approx 0$ . Para os demais valores pode-se notar que à medida que aumentamos o valor de  $\theta_0$ , aumenta também o período. Isso confirma que, de fato, o período depende da amplitude.

## 5 O pêndulo isócrona de Huygens

Por volta de 1650, Huygens construiu um pêndulo cujo período de oscilação independia da amplitude do movimento. Esse pêndulo, chamado isócrona, consiste em se fazer uma partícula percorrer uma trajetória específica: um arco de cicloide, conforme o esquema abaixo.

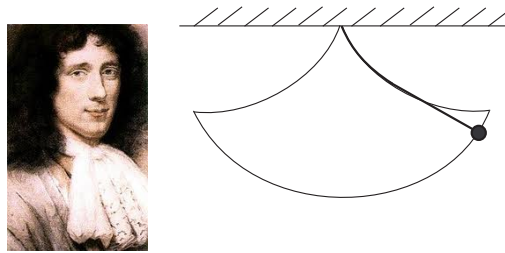


Figura 14: Huygens e o pêndulo isócrona

À princípio, Huygens fez construções empíricas, colocando obstáculos de ambos os lados de um pêndulo simples pois, dessa forma, à medida que o fio encostava no obstáculo, o comprimento efetivo do pêndulo se tornava menor e isso acarretaria a diminuição do período. Huygens só obteve sucesso em seu empreendimento quando utilizou como obstáculos arcos de cicloide. Isso foi possível, devido a propriedade de que o lugar geométrico descrito pelos centros de curvatura de uma cicloide é também uma cicloide chamada de evoluta. Para mais detalhes sobre o assunto, ver [9].

Para mostrar que no caso desse pêndulo o período não depende da amplitude vamos supor que a partícula seja abandonada, a partir do repouso, de um ponto  $P_0$  sendo  $H$  a altura desse ponto em relação ao ponto mais baixo da trajetória, ou seja,  $y_0 = y(0) = H$ , como indica a Figura 15. Usando a lei da conservação da energia pode-se calcular o módulo da velocidade da partícula,  $v$ , em sua descida quando esta se encontra em um ponto arbitrário  $P$ , cuja altura é  $y$ :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H - y) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - y)}. \quad (5.0.9)$$

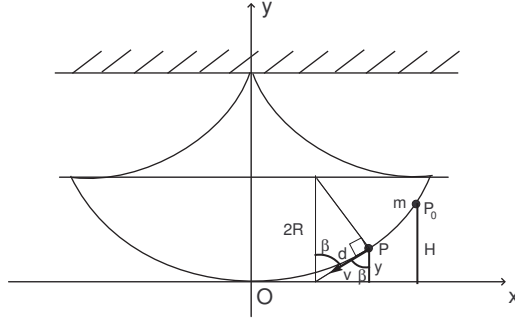


Figura 15:

Lembrando que a velocidade da partícula é sempre tangente à trajetória, a componente vertical de sua velocidade é dada por

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(H-y)} \cos \beta \quad (5.0.10)$$

e usando a Proposição 4, apresentada na Seção 3, pode-se escrever

$$\cos \beta = \frac{d}{2R} \quad \text{e} \quad y = d \cos \beta,$$

em que  $d$  e  $\beta$  são como na Figura 15.

Logo,  $\cos \beta = \sqrt{\frac{y}{2R}}$ . Substituindo em (5.0.10) tem-se

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{(H-y)y}. \quad (5.0.11)$$

Note que o intervalo de tempo transcorrido desde o instante inicial até o instante em que a partícula atinge o ponto mais baixo da trajetória é igual a  $\frac{T}{4}$  em que  $T$  é o período das oscilações. Integrando (5.0.11), conclui-se que

$$\int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{(H-y)y}} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^{\frac{T}{4}} dt \Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{(H-y)y}}.$$

Agora, fazendo a mudança de variável  $\xi = \frac{y}{H}$ , com  $dy = Hd\xi$ , obtém-se

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}}. \quad (5.0.12)$$

Para se obter a expressão para o período completaremos quadrados e assim, tem-se

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{4} - (\xi - \frac{1}{2})^2}}.$$

Fazendo a mudança de variável  $\xi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta$ , com  $d\xi = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$ , tem-se

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{4} - (\xi - \frac{1}{2})^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta = \pi.$$

Substituindo em (5.0.12), obtém-se

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Note que essa expressão do período não envolve o  $H$ , ou seja, o período do movimento não depende da amplitude das oscilações.

Portanto, qualquer que seja o ponto onde a partícula é abandonada, ela atingirá, no mesmo instante, o ponto mais baixo da trajetória cicloidal.

Assim, Huygens alcançou seu objetivo, uma vez que seu relógio de pêndulo reduziu a margem de erro de cerca de quinze minutos por dia para meros dez ou quinze segundos. O relógio se tornou, enfim, um instrumento realmente confiável para medir o tempo. Para mais detalhes veja, por exemplo, [4] e [7].

## 6 O problema da braquistócrona

Conforme abordado na introdução, o problema da braquistócrona, ou do tempo mínimo, foi apresentado aos matemáticos por Johann Bernoulli, na *Acta Eruditorum*, em 1696. De forma surpreendente e, desafiando a intuição, a cicloide apareceu como solução desse problema. Muitos matemáticos apresentaram soluções, inclusive o próprio Johann. Sua solução, que faremos aqui, baseada em [6] e [11], envolve uma analogia com a refração da luz, um tema que foi de grande preocupação dos cientistas do início do século XVII.



Figura 16: Jakob e Johann Bernoulli

A propósito, a lei da refração foi descoberta por Willebrord Snell (1591-1626) em 1621 de um modo experimental, embora Fermat e Descartes tenham contribuído muito nesse assunto.

*Lei da refração de Snell ou Princípio do menor tempo de Fermat:* Sejam  $v_1$  e  $v_2$  as velocidades da luz em dois meios distintos, (ar e água, por exemplo). Se um raio de luz percorre de um ponto  $A$  de um meio, para um ponto  $B$  do outro, por um caminho  $ACB$  que minimiza o tempo gasto, então

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2},$$

em que  $\theta_1$  é o ângulo de incidência e  $\theta_2$  é o ângulo de refração, como na Figura 17.

*A solução de Johann Bernoulli:* Considere, por exemplo, dois pregos martelados, ao acaso, em uma parede ou num plano (não na mesma vertical), e que o prego superior (ponto  $P_0$ ) seja conectado ao inferior (ponto  $P_1$ ) por um arame flexível na forma de uma curva lisa. O problema consiste em determinar qual a forma do arame no qual uma partícula deslizará (sem atrito), sob influência da gravidade, para passar do ponto superior ao inferior no menor tempo possível.

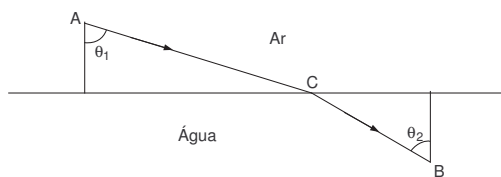


Figura 17: Lei da refração de Snell

Para resolver o problema, Bernoulli fez uma analogia com o caso da propagação da luz em meios de densidade variável. Suponhamos que o meio atravessado pela luz é constituído por uma série de camadas paralelas  $F_1, F_2, F_3, \dots$  de densidade decrescente. Logo, as velocidades de propagação nessas camadas são  $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$ , ver Figura 18.

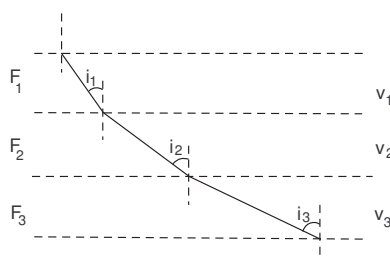


Figura 18:

Pela lei de Snell tem-se

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} = \frac{\sin i_3}{v_3} = \dots$$

A seguir, Bernoulli considerou que essas camadas se tornam mais finas e mais numerosas e, portanto, no limite, a velocidade da luz cresce continuamente, quando o raio de luz desce. Desse modo, concluí-se que

$$\frac{\sin i}{v} = \text{constante}, \quad (6.0.13)$$

sendo essa equação satisfeita em cada ponto da trajetória do raio de luz e o ângulo  $i$  se torna o ângulo da tangente à trajetória com a vertical.

Dado um sistema de coordenadas como na Figura 19, considere que a partícula (como o raio de luz) seja capaz de escolher a trajetória em que irá deslizar de  $P_0$  a  $P_1$  no menor tempo possível.

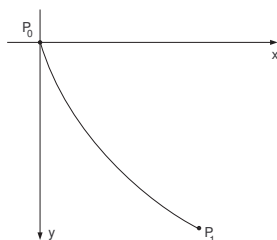


Figura 19:



Designando por  $v$  a velocidade da partícula de massa  $m$ , quando ela passa pelo ponto  $P = (x, y)$  tem-se, pela lei de conservação de energia, que

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2,$$

em que  $g = 9,8m/s^2$ . Desse modo

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (6.0.14)$$

Pela Figura 18, observa-se que

$$\sin i = \cos \left( \frac{\pi}{2} - i \right) = \frac{1}{\sec \left( \frac{\pi}{2} - i \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \left( \frac{\pi}{2} - i \right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (6.0.15)$$

Substituindo, (6.0.14) e (6.0.15) em (6.0.13), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\sin i}{v} = c &\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}}} = c \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} \frac{1}{\sqrt{2gy}} = c \\ &\Rightarrow \frac{1}{y(1 + (y')^2)} = 2gc^2 \\ &\Rightarrow y(1 + (y')^2) = c. \end{aligned} \quad (6.0.16)$$

A equação (6.0.16) é conhecida como equação diferencial da braquistócrona cuja solução mostraremos tratar-se da anunciada cicloide.

Substituindo  $y'$  por  $\frac{dy}{dx}$  e separando as variáveis tem-se

$$\begin{aligned} y \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = c &\Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{c - y}{y} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c - y}{y}} \\ &\Rightarrow dx = \sqrt{\frac{y}{c - y}} dy \\ &\Rightarrow x = \int \sqrt{\frac{y}{c - y}} dy. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $u^2 = \frac{y}{c - y}$ , tem-se  $y = \frac{cu^2}{1 + u^2}$  e  $dy = \frac{2cu}{(1 + u^2)^2} du$  e, portanto,

$$x = \int \frac{2cu^2}{(1 + u^2)^2} du.$$

Agora, utilizando a substituição trigonométrica  $u = \tan \phi$ , tem-se  $du = \sec^2 \phi d\phi$ , e então

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{2c \tan^2 \phi \sec^2 \phi}{(1 + \tan^2 \phi)^2} d\phi = 2c \int \frac{\tan^2 \phi}{\sec^2 \phi} d\phi \\ &= 2c \int \sin^2 \phi d\phi = c \int (1 - \cos 2\phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2}c(2\phi - \sin 2\phi) + k, \quad (k \text{ constante}). \end{aligned}$$

Na verdade,  $k = 0$ , pois  $y = 0$  quando  $\phi = 0$ , e como  $P_0$  está na origem, devemos ter  $x = 0$  quando  $\phi = 0$ .

Uma vez que  $y = \frac{cu^2}{1+u^2}$ , tem-se

$$y = \frac{c \tan^2 \phi}{\sec^2 \phi} = c \sin^2 \phi = \frac{1}{2}c(1 - \cos 2\phi).$$

Portanto,

$$x = \frac{1}{2}c(2\phi - \sin 2\phi) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}c(1 - \cos 2\phi). \quad (6.0.17)$$

Em (6.0.17), fazendo  $a = \frac{c}{2}$  e  $\theta = 2\phi$ , concluí-se que

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta),$$

que são as equações paramétricas da cicloide da Figura (18).

## Referências

- [1] ÁVILA, G., *Cálculo das funções de uma variável*, Volume 2, 7. Ed., Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- [2] BOS, H. J. M., *O cálculo no século XVIII: técnicas e aplicações*, Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.
- [3] BOYER, Carl, B., *História da Matemática*, 2. Ed., São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [4] BURROWES, M. e FARINA, C., *Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens*, Revista brasileira de ensino de física, v. 27, n. 2, 175-179, 2005.
- [5] FIGUEIREDO, D. G. e NEVES, A.F., *Equações Diferenciais Aplicadas* Coleção Matemática Universitária, 3ª Ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [6] FIGUEIREDO, D. G., *Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana* In: Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 9/10, 69-108, 1989.
- [7] FONSECA, A., *Curso de mecânica*, vol. III, Rio de Janeiro: LTC Editora, 1975.
- [8] GARBI, G. G., *A rainha das ciências*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [9] PISKUNOV, N., *Cálculo Diferencial e Integral*, vol. I, São Paulo: Edições Cardoso, 1969.
- [10] PUTNOKI, J. C. *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico*, Volumes II e especial para o vestibulando, São Paulo: Editora Scipione, 1989.
- [11] SIMMONS, George F., *Cálculo com Geometria Analítica*, Volumes 1 e 2, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [12] ROQUE, T., *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, Rio de Janeiro: Zahar, 2012.