

Controle da pressão de uma máquina a vapor via estabilidade assintótica*

Rodrigo Mendes Alves [†]

Orientador: Jean Venato Santos [‡]

6 de dezembro de 2012

Resumo

O trabalho proposto trata-se de uma manipulação matemática baseada em conceitos físicos, com o objetivo de descrever o problema de estabilidade de um controlador automático de uma máquina a vapor.

Palavras Chave: Equações diferenciais, Campos de vetores, Retrato de fase e Estabilidade assintótica

Introdução

A máquina a vapor tem o intuito de transformar energia térmica em energia mecânica, sendo largamente utilizada no período da Revolução Industrial, a partir do final do século XVIII. Entre outros mecanismos da mesma destaca-se o “controlador centrífugo de Watt”, responsável por manter a estabilidade da máquina controlando a saída de vapor e, por consequência, as forças envolvidas no trabalho da máquina.

Através do estudo da classificação das equações diferenciais lineares no plano, de campos de vetores para a análise dos retratos de fases das equações diferenciais que regem o problema e da estabilidade assintótica em pontos de equilíbrio; pode-se concluir o trabalho matemático sobre a máquina e chegar numa desigualdade que fornece informações suficientes para controlar a estabilidade da máquina a vapor.

A princípio este mecanismo funcionava bem, fazendo com que a máquina mantivesse a velocidade de rotação desejada. O estado ideal da máquina pode ser visto como um ponto de equilíbrio do sistema. Como os controladores faziam o sistema voltar ao estado ideal quando houvesse pequenas perturbações, tal estado podia ser visto como um ponto de equilíbrio estável.

Com o avanço da tecnologia houve uma melhoria nos materiais utilizados nos controladores. Paradoxalmente, esta melhoria acarretou no mau funcionamento dos mesmos. Maxwell em [7] e Vichégnadski em [9], apresentaram explicações e consequentemente soluções para tal perda de estabilidade.

A seguir descrevemos a explicação dada por Vichégnadski em [9], recompilada por Doering e Lopes em [4].

A figura abaixo esquematiza a máquina a vapor utilizada no século XVIII.

*Trabalho de Iniciação científica

[†]Email: rodrigo-mendes-alves@hotmail.com. Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia

[‡]Email: jvenatos@famat.ufu.br. Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia

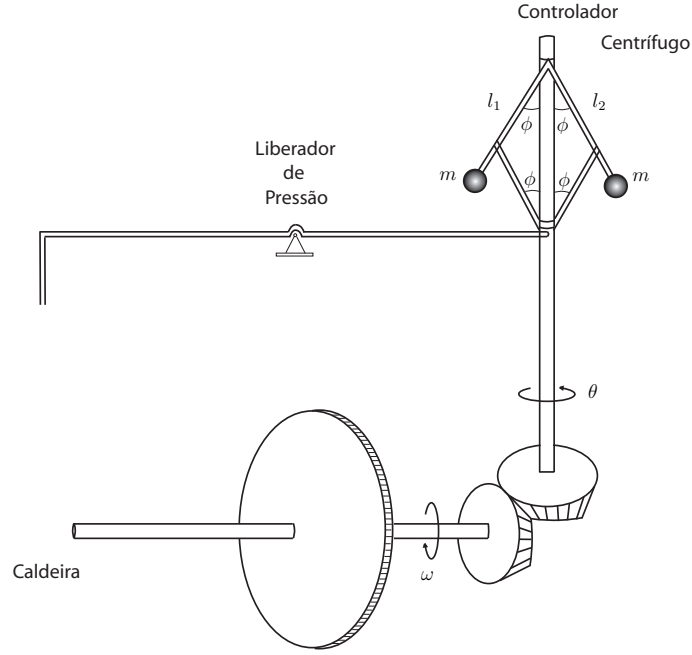


Figura 1: Máquina a vapor

A produção de energia da máquina a vapor começa com o aquecimento de água, que forma o vapor d'água que exerce pressão sobre um mecanismo de transmissão que, por sua vez, põe um eixo em movimento. A rotação desse eixo servia a vários fins industriais e tinha sua velocidade controlada pela quantidade de vapor que era aplicada ao mecanismo. O eixo é dotado de um disco de inércia J o qual, posto em movimento pela força do vapor realiza um trabalho útil de acordo com a Segunda Lei de Newton para os momentos:

$$P_1 - F = J\omega'.$$

O momento P_1 refere-se ao momento produzido pela força de vapor no disco, e o momento F refere-se ao momento da força de resistência à rotação. O objetivo é fazer o sistema atingir rapidamente uma velocidade estacionária ω_0 , mas ao mesmo tempo conseguir manter essa velocidade, com mais entrada de vapor, sempre que a força de resistência aumentar.

Na seção 2 descrevemos o mecanismo de controle da pressão na máquina, assim como sua modelagem matemática a partir de um sistema de equações não lineares proposto por Vichégnadski em [9]. Na seção 2 apresentamos os principais conceitos e resultados da teoria qualitativa de equações diferenciais que são aplicados no sistema do controlador. Na seção 4 aplicaremos a teoria descrita na seção 3 para estudar a estabilidade do controlador. Por fim, na última seção é apresentada uma discussão dos possíveis motivos causadores da perda de estabilidade do sistema.

1 Modelagem do controlador de Watt

O foco deste trabalho está na modelagem matemática do regulador e na solução do problema de estabilidade do mesmo. Analisando as forças que atuam no regulador, encontra-se o diagrama:

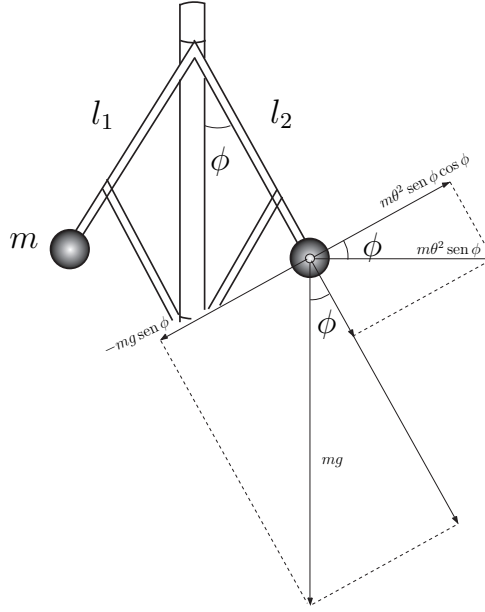


Figura 2: Diagrama de forças do controlador de Watt

Verticalmente, a única variável é o ângulo ϕ entre o eixo vertical e as hastes, conforme Figura 2. Supondo unitário, para simplificar, o comprimento das hastes, vemos que, como no caso de um pêndulo, a força mg da gravidade impõe uma componente tangencial $-mg \sin \phi$. Também temos uma força de atrito no sistema, principalmente nas hastes; supondo pequenas variações, podemos considerar o atrito proporcional à velocidade vertical das esferas, ou seja, dado por $-b\phi'$. Finalmente, temos o movimento horizontal circular das esferas do regulador, de velocidade angular θ , imposto pela rotação do eixo vertical. A força centrífuga da rotação horizontal é dada por $F_{cent} = m\omega^2 r$, sendo r a distância da bola até a haste, considerando que r é a projeção $l \sin \phi$, onde l é unitário, temos que $F_{cent} = m\theta^2 \sin \phi$, com componente tangencial $m\theta^2 \sin \phi \cos \phi$. Sabe-se que a força tangencial muda o módulo da velocidade do corpo, portanto é necessário a análise das forças nesta direção dada pela segunda Lei de Newton:

$$m\phi'' = m\theta^2 \sin \phi \cos \phi - mg \sin \phi - b\phi'.$$

Vejamos a equação diferencial do disco de inércia J . Para cada ângulo ϕ de abertura das hastes do regulador temos uma posição do mancal, que varia com $\cos \phi$, produzindo um momento de força de ação do vapor proporcional, dado por $P_1 = k \cos \phi$. Assim, a equação diferencial do eixo de inércia é

$$J\omega' = k \cos \phi - F,$$

onde F é a força de resistência à rotação.

Introduzindo a variável $\psi = \phi'$ e usando a relação $\theta = n\omega$ entre o regulador e a máquina a vapor, onde n é o coeficiente de transmissão da engrenagem, resulta o sistema

$$\begin{cases} \phi' = \psi \\ \psi' = n^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi - g \sin \phi - \frac{b}{m} \psi, \\ \omega' = \frac{k}{J} \cos \phi - \frac{F}{J} \end{cases} \quad (1.0.1)$$

associado ao campo vetorial

$$X(\phi, \psi, \omega) = (\psi, n^2\omega^2 \sin \phi \cos \phi - g \sin \phi - \frac{b}{m}\psi, \frac{k}{J} \cos \phi - \frac{F}{J})$$

definido em $\mathbb{R}^3$.

Pelas características do sistema, basta considerar X definido no aberto $\Omega = (0, \pi/2) \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, onde $\cos \phi > 0$, $\sin \phi > 0$ e $\omega > 0$, de modo que (ϕ, ψ, ω) é um ponto de equilíbrio do campo vetorial X , isto é, $X(\phi, \psi, \omega) = (0, 0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} k \cos \phi = F \\ \psi = 0, \\ n^2\omega^2 \cos \phi = g \end{cases} \quad (1.0.2)$$

Denotando por $(\phi_0, 0, \omega_0)$ a única solução deste sistema, temos que tal solução é o único ponto de equilíbrio do campo X no aberto Ω , ou seja, o estado ideal do sistema. A partir das equações (1.0.2) temos que $F n^2 \omega_0^2 = k g = \text{constante}$. Assim, para cada força de resistência F dada, existe uma solução estacionária do sistema (1.0.1), com ângulo ϕ_0 estacionário ($\phi' = \psi = 0$) e velocidade angular $\omega_0 > 0$.

Na próxima seção é apresentada a teoria necessária para o estudo da estabilidade do estado ideal.

2 Base teórica

Um *campo vetorial* X de classe C^1 num subconjunto Ω aberto do $\mathbb{R}^n$, é uma aplicação de classe C^1 que a cada ponto p de Ω associa um vetor $X(p)$ em $\mathbb{R}^n$. Ao campo vetorial X está associada a equação diferencial

$$x' = X(x), \quad (2.0.3)$$

e vice-versa.

Seja I um intervalo aberto da reta $\mathbb{R}$ contendo o zero. Dizemos que uma função $\gamma : I \rightarrow \Omega$, de classe C^1 , é uma *solução ou trajetória do campo vetorial* X se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, para todo $t \in I$. Para simplificar a notação, identificamos a solução γ com sua imagem orientada, a qual denominamos *órbita de* X , definida em $I(\gamma)$. Uma função $\gamma : I \rightarrow U$ chama-se *solução máxima* se para toda trajetória $\eta : J \rightarrow U$ tal que $I \subseteq J$ e $\gamma = \eta|_I$ então $J = I$ e consequentemente $\gamma = \eta$. Neste caso I chama-se *intervalo maximal*. O conjunto aberto Ω , munido da decomposição em órbitas (imagens orientadas das soluções maximais) de X é chamado *retrato de fase* de X .

O seguinte teorema da teoria clássica de equações diferenciais estabelece, além da existência e unicidade de soluções da equação (2.0.3), a existência de um fluxo de classe C^1 associado ao campo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$:

Teorema 1 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

1. *Para cada $p \in \Omega$ existe um intervalo maximal $I(\gamma_p)$ onde está definida a única solução γ_p da equação (2.0.3) tal que $\gamma_p(0) = p$.*
2. *Se $q = \gamma_p(t)$ para algum $t \in I(\gamma_p)$, então $I(\gamma_q) = I(\gamma_p) - t = \{r - t; r \in I(\gamma_p)\}$ e $\gamma_q(s) = \gamma_p(t + s)$ para todo $s \in I(\gamma_q)$.*
3. *O conjunto $\Delta = \{(t, p); p \in \Omega, t \in I(\gamma_p)\}$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e a aplicação $\varphi : \Delta \rightarrow U$ dada por $\varphi(t, p) = \gamma_p(t)$ é de classe C^1 .*

Dem.: Veja [4, 6, 10].

A aplicação $\varphi : \Delta \rightarrow \Omega$ é chamada *fluxo gerado por X* .

Dizemos que $p \in \Omega$ é um *ponto singular* ou *ponto de equilíbrio* de X se $X(p) = O$, caso contrário dizemos que p é um *ponto regular* de X . Uma trajetória γ é dita *periódica* se está definida em $\mathbb{R}$ e existe um real $\tau > 0$ tal que $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um ponto singular p de um campo vetorial $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *hiperbólico* se os autovalores (complexos) da derivada DX_p têm parte real não nula. Neste caso, o número de autovalores de DX_p que têm parte real negativa será chamado de *índice de estabilidade* de X em p . Um ponto singular p é do tipo *sela hiperbólica* se seu índice de estabilidade é maior do que zero e menor que n . Denotando por φ_t o fluxo associado ao campo vetorial X , dizemos que um ponto de equilíbrio p de X é *estável* se, para qualquer vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p , existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^n$ de p tal que $W \subset \Omega \cap U$ e $\varphi_t(q) \in U$, para todo $q \in W$ e $t > 0$. Um ponto de equilíbrio p é dito *assintoticamente estável* se ele for estável e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(q) = p$, para qualquer $q \in W$.

Dados dois campos vetoriais X_1 e X_2 definidos nos abertos Ω_1 e Ω_2 . Dizemos que X_1 é *topologicamente equivalente* a X_2 se existir um homeomorfismo $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ que leva órbita de X_1 em órbita de X_2 preservando orientação. Mais precisamente, sejam $p \in \Omega_1$ e $\gamma_1(p)$ a órbita orientada de X_1 passando por p , então $h(\gamma_1(p))$ é a órbita orientada $\gamma_2(h(p))$ de X_2 passando por $h(p)$. Tal noção estabelece uma relação de equivalência entre campos vetoriais definidos em abertos de $\mathbb{R}^n$.

O próximo resultado estabelece a equivalência topológica local entre dois campos em vizinhanças de pontos singulares hiperbólicos com o mesmo índice de estabilidade:

Teorema 2 (Hartman-Grobman) *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$, dado um campo vetorial $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ com um ponto singular hiperbólico p . Existem vizinhanças V de p e W de O em $\mathbb{R}^n$ tais que $X|_V$ é topologicamente equivalente a $DX_p|_W$.*

Dem.: Veja [10, 6].

Este resultado aliado à classificação dos sistemas de equações ordinárias lineares fornece um entendimento local em torno de pontos de equilíbrio hiperbólicos, em particular permite estudar a estabilidade e estabilidade assintótica de tais pontos. Com efeito, dado um ponto de equilíbrio p do campo vetorial $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, a fim de que ele seja assintoticamente estável basta garantir que a aplicação linear DX_p tenha todos autovalores com parte real negativa.

Uma ferramenta prática e eficaz no estudo do sinal da parte real das raízes de um polinômio é dada pelo critério de Hurwitz ([5]), o qual passamos a descrever sucintamente. Uma apresentação mais completa deste critério inclusive sua demonstração e algumas aplicações em estabilidade de sistemas dinâmicos podem ser encontradas em [7] e [11].

Seja $p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$ um polinômio com coeficientes reais positivos. Para $k = 1, \dots, n$, considere os seguintes determinantes cujas matrizes associadas são conhecidas como matrizes de Hurwitz:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1-n} & a_{2-n} & a_{3-n} & \dots & a_{n-k} \end{vmatrix},$$

onde estamos supondo que $a_j = 0$ para $j < 0$.

Teorema 3 (Critério de Hurwitz [5]) *Sejam $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i > 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, e o polinômio*

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Então, todas as raízes de $p(\lambda)$ têm parte real negativa se, e somente se, $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

Dem.: Veja [5, 7, 11].

Exemplo 4 Considere o polinômio

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 3.$$

Note que todos os coeficientes são positivos. Verifiquemos se $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\Delta_1 = |5| = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 33, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 156 \text{ e}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 468.$$

Logo, pelo Critério de Hurwitz, todas as raízes do polinômio acima têm parte real negativa. O que está de acordo com o esperado, uma vez que o polinômio em questão foi obtido a partir da fatoração $(x+1)(x+3)(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ e portanto suas raízes $-1, -3, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ têm todas parte real negativa.

3 Aplicação

Voltamos agora ao estudo do sistema (1.0.1), mais especificamente do seu ponto de equilíbrio $(\phi_0, 0, \omega_0)$ calculado em (3.0.4).

Por um lado, o Teorema de Hartman-Grobman, identifica o comportamento do campo não linear X , numa vizinhança do ponto de equilíbrio $(\phi_0, 0, \omega_0)$, com o comportamento do campo linear definido pela aplicação derivada:

$$DX(\phi_0, 0, \omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ n^2 \omega_0^2 \cos 2\phi_0 - g \cos \phi_0 & -b/m & 2n^2 \omega_0 \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ \frac{k}{J} \sin \phi_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.0.4)$$

Observação 5 *Para garantir a estabilidade assintótica de $(\phi_0, 0, \omega_0)$, e portanto a estabilidade do sistema máquina-regulador, basta analisar os parâmetros ajustáveis da máquina e do regulador para que induzam autovalores de $DX(\phi_0, 0, \omega_0)$ com parte real negativa.*

Para isto, considere o polinômio característico de (3.0.4):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - DX) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -n^2 \omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0 & \lambda + b/m & -2n^2 \omega_0 \sin \phi_0 \cos \phi_0 \\ \frac{k}{J} \sin \phi_0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (b/m)\lambda^2 + (-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0)\lambda + 2\frac{k}{J}n^2\omega_0 \sin^2 \phi_0 \cos \phi_0. \quad (3.0.5)$$

Para estudar o sinal da parte real das raízes deste polinômio vamos aplicar a seguinte proposição que é uma consequência do Critério de Hurwitz enunciado no Teorema 3:

Proposição 6 *Se $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$, então as raízes de $p(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ têm todas parte real negativa se, e somente se, $a_2a_1 > a_0$.*

Dem.: Sendo $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ e $a_0 > 0$. Calculando os determinantes Δ_k para $k = 1, 2, 3$, associados a polinômio $p(\lambda)$ obtemos:

$$\Delta_1 = |a_2| = a_2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0(a_2a_1 - a_0).$$

Assim, fica claro que $\Delta_k > 0$ para $k = 1, 2, 3$ se, e somente se, $a_2a_1 > a_0$. Portanto, pelo Teorema 3 [Critério de Hurwitz], todas as raízes de $p(\lambda)$ têm parte real negativa se, e somente se, $a_2a_1 > a_0$. $\square$

No intuito de aplicar a Proposição 6 no polinômio característico (3.0.5) será verificado, inicialmente, se seus coeficientes

$$a_2 = b/m, \quad a_1 = (-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0) \quad \text{e} \quad a_0 = 2\frac{k}{J}n^2\omega_0 \sin^2 \phi_0 \cos \phi_0,$$

são positivos:

$$b > 0, m > 0 \Rightarrow a_2 > 0 \quad \text{e}$$

$$a_1 = (-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0) > 0 \Leftrightarrow g \cos \phi_0 > n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0.$$

Sabendo que

$$n^2\omega_0^2 = g/\cos \phi_0 \quad (3.0.6)$$

temos,

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow \cos^2 \phi_0 > \cos 2\phi_0 \Leftrightarrow \cos^2 \phi_0 > \cos^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_0 \Leftrightarrow \sin^2 \phi_0 > 0,$$

o que é satisfeito, pois $0 < \phi_0 < \pi/2$. Tal restrição no argumento ϕ_0 e o fato das constantes ω_0 , k , J e n serem positivos fornecem também:

$$a_0 = 2\frac{k}{J}n^2\omega_0 \sin^2 \phi_0 \cos \phi_0 > 0.$$

Finalmente, aplicando a condição $a_2a_1 > a_0$, da Proposição 6, nos coeficientes do polinômio característico (3.0.5) será obtida uma condição equivalente relacionada aos parâmetros do sistema (1.0.1):

$$(b/m)(-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0) > 2\frac{k}{J}n^2\omega_0 \sin^2 \phi_0 \cos \phi_0$$

$$-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0 > 2\frac{km}{bJ}n^2\omega_0 \sin^2 \phi_0 \cos \phi_0$$

Aplicando novamente a igualdade (3.0.6) segue que:

$$\begin{aligned}
-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0 &> 2 \frac{kmg}{Jb\omega_0} \sin^2 \phi_0 \\
-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + g \cos \phi_0 &> 2 \frac{kmg}{Jb\omega_0} (-\cos 2\phi_0 + \cos^2 \phi_0) \\
-n^2\omega_0^2 \cos 2\phi_0 + \frac{g^2}{n^2\omega_0^2} &> 2 \frac{kmg}{Jb\omega_0} \left(-\cos 2\phi_0 + \frac{g^2}{n^4\omega_0^4} \right) \\
\frac{1}{n^2\omega_0^2} (-n^4\omega_0^4 \cos 2\phi_0 + g^2) &> 2 \frac{kmg}{Jb\omega_0} \frac{1}{n^4\omega_0^4} (-n^4\omega_0^4 \cos 2\phi_0 + g^2) \\
n^2\omega_0^2 &> 2 \frac{kmg}{Jb\omega_0} \\
\frac{bJ}{m} &> \frac{2kg}{n^2\omega_0^3}. \tag{3.0.7}
\end{aligned}$$

Da Proposição 6 e do raciocínio acima, as raízes de (3.0.5) têm todas parte real negativa se, e somente se, (3.0.7) for satisfeita. Assim, pela Observação 5, esta desigualdade é condição necessária e suficiente para que o ponto de equilíbrio $(\phi_0, 0, \omega_0)$ seja assintoticamente estável e portanto para que a máquina a vapor permaneça estável.

4 Conclusão

Para garantir a estabilidade do sistema máquina-regulador, ajustes dos materiais utilizados na construção da máquina e nas dimensões das partes que a compõem são essenciais. Naquela época, meados do século XIX, em plena revolução industrial não eram raras as seguintes ações:

- Redução do atrito b entre as hastes devida ao aperfeiçoamento tecnológico de materiais.
- Aumento da massa m das bolas a fim de obter maior potência da máquina a vapor.
- Diminuição do momento angular para aumentar a velocidade angular ω do eixo da máquina.

Note que estas medidas diminuem o membro esquerdo da desigualdade (3.0.7) o que acarretava muitas vezes na perda de estabilidade da máquina a vapor naquela época. A partir de um desenvolvimento matemático análogo ao apresentado neste trabalho, o engenheiro russo Vichégnadski propôs as seguintes medidas para que a máquina funcionasse perfeitamente:

- Aumentar o coeficiente de atrito das hastes.
- Aumentar o coeficiente de transmissão n .
- Diminuir o fator de proporcionalidade k da ligação do regulador com a válvula.

Referências

- [1] L. C. Barret. *Advanced Engeneering Mathematics*. McGraw-Hill, Inc., 6th ed, 1995.
- [2] C. Callioli, R. Costa, H. Domingues. *Álgebra linear e aplicações*. Editora Atual, 6^a ed, 1995.
- [3] F. Coelho e M. Lourenço. *Um curso de Álgebra linear*. Editora edusp, 2^a ed, 2001.
- [4] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] A. Hurwitz. *Über die bedingungen unter welchen eine gleichung nur wurzeln mit negativen reelen besitzt*. Mathematische Annalen, **46**, 273-280, 1895.
- [6] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Editora John Wiley & Sons, 9th ed, Singapore, 2006.
- [7] S. Lee. *Famílias de polinômios estáveis: teoremas de Routh-Hurwitz e Khari-tonov*. Dissertação de Mestrado, São Paulo, 2008.
- [8] D. L. Krieder, R. G. Kuller, D. R. Ostberg, F. W. Perkins. *An introduction to linear analysis*. Editora Addison Wesley, Pub. Co., 1966.
- [9] L. Pontriaguine. *Équations différentielles Ordinaires*. Editora MIR, Moscou, 1975.
- [10] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [11] G. R. Souza. *Crítério de Hurwitz e estabilidade de equilíbrio*. Dissertação de Mestrado, UFMG, 2005.