

# Métodos Iterativos para a Solução da Equação de Poisson

Valdirene da Rosa Rocho,      **Dagoberto Adriano Rizzotto Justo**,

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, PPGMap, UFRGS,

91509-900, Porto Alegre, RS

E-mail: valdireneroxo@hotmail.com,    dagoberto.justo@ufrgs.br

**Palavras-chave:** *Equação de Poisson, Condições de Contorno de Neumann, Métodos Iterativos, Convergência.*

**Resumo:** *Para aproximar a solução da equação de Poisson através do método de diferenças finitas precisamos resolver um sistema linear, que pode ser resolvido através de um método iterativo. Para analisar a convergência de tais métodos podemos estudar os autovalores do sistema obtido, onde desejamos que o módulo do maior autovalor seja menor ou igual a um. Apresentamos neste trabalho fórmulas para todos os autovalores obtidos utilizando condição de contorno de Neumann. Para este problema obtém-se condições para que o mesmo tenha solução baseado na integral do termo fonte.*

## Introdução

A equação de Poisson é uma equação elíptica de derivadas parciais com uma ampla utilidade em Dinâmica de Fluidos. Para resolver esta equação pode-se utilizar vários métodos como, por exemplo, uma função de Green ou métodos numéricos. E ainda precisa-se de adequadas condições de contorno.

Uma maneira de aproximar a solução da equação de Poisson é utilizar o método de diferenças finitas, de onde obtém-se um sistema linear  $A\vec{p} = \vec{b}$  esparso e tridiagonal no caso unidimensional. Esse sistema pode ser resolvido através de um método iterativo como Jacobi ou Gauss-Seidel, onde uma matriz de iteração  $G$  é obtida [1, 6]. Para analisar a convergência de tais métodos podemos estudar os autovalores da matriz  $G$ , onde desejamos que o módulo do maior autovalor seja menor ou igual a um.

O problema aliado a condições de contorno de Dirichlet é amplamente estudado na literatura como em [8, 7, 6] onde são apresentados para alguns casos fórmulas para as matrizes de iteração. Entretanto, para o problema com condições de Neumann não são encontradas fórmulas ou condições clara para a solução de tais problemas. Apresentamos neste trabalho fórmulas para todos os autovalores obtidos utilizando condições de contorno de Neumann.

Utilizando o produto de Kronecker pode-se relacionar as matrizes de discretização dos problemas em uma e duas dimensões. O espectro da matriz  $A$  é útil, por exemplo, para determinar a existência de uma ou infinitas soluções do problema discretizado. Os problemas de Neumann possuem um autovalor igual a zero, o que não garante solução para o problema. Se esta existir, não será única.

Ao tratar do problema de Neumann analisou-se as matrizes de iteração a que se refere aos métodos iterativos e obteve-se que o maior autovalor é exatamente 1, e de acordo com [8] deveríamos ter que o raio espectral fosse estritamente menor do que 1 para o método iterativo ser convergente. Seguindo [5] podemos concluir sobre quais condições o problema de Neumann é condicionalmente convergente, pois encontrou-se que o autovalor  $\lambda = 1$  é único, e assim será considerado o segundo maior autovalor como sendo o pseudo raio espectral da matriz de iteração.

# 1 A Equação de Poisson

A equação de Poisson é uma equação de derivadas elíptica, dada por

$$\Delta p = f \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

Segundo [2], ao utilizar-se as condições de contorno de Neumann, isto é,

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (2)$$

para resolver-se a equação (1) é necessário que a hipótese de compatibilidade

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} g \, dS \quad (3)$$

seja satisfeita para existir solução para o problema.

Ao resolver a equação (1) para o caso unidimensional com condições de contorno de Neumann, discretizamos-a por

$$\frac{p_1 - p_0}{h} = 0, \quad \text{o que implica que } p_0 = p_1, \quad (4)$$

e

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{h} = 0, \quad \text{o que implica que } p_{n+1} = p_n. \quad (5)$$

Portanto discretizando-se o problema contínuo (1) no caso unidimensional têm-se

$$\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2} = f_i \quad (6)$$

A partir de (6) obtém-se um sistema de equações lineares. Considerando as condições de contorno (4) e (5) este sistema admite a forma matricial

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ p_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h^2 f_1 \\ \vdots \\ h^2 f_n \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Dessa forma, o problema de encontrar uma aproximação para a função  $p(x)$  que satisfaz (1) se reduz em encontrar um vetor  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$  que satisfaz a equação matricial (7). Em geral, sabe-se que a solução do problema não é única, isso implica que se o sistema  $A\vec{p} = \vec{b}$  tem solução  $\vec{p}$ , então  $\vec{p} + \alpha \cdot \vec{1}$  também será solução desse sistema, ou seja,

$$A(\vec{p} + \alpha \cdot \vec{1}) = A\vec{p} + \alpha A\vec{1} = \vec{b} + 0 = \vec{b} \quad (8)$$

Para o caso bidimensional a discretização da equação de Poisson através do método diferenças finitas centradas discretizada no ponto  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  torna-se a fórmula de cinco pontos, que é dada por

$$\frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j} - 4p_{i,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j}. \quad (9)$$

Assim, obtém-se o sistema linear ( $L\vec{p} = \vec{b}$ ). Utilizando o produto de kronecker reescreve-se a matriz do caso bidimensional [4]

$$L = (A \otimes I) + (I \otimes A) \quad (10)$$

onde  $A$  é uma matriz tridiagonal, ou seja, a matriz do sistema (7). Deste modo, descreve-se

$$L = A \oplus A = \begin{pmatrix} A - 2I & 2I & & \dots & 0 \\ I & A - 2I & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & I & A - 2I & I \\ 0 & \dots & & 2I & A - 2I \end{pmatrix} \quad (11)$$

onde o bloco  $I$  é a matriz identidade e o bloco  $A - 2I$  de (11) é dado por

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

## 2 Sistema Linear e Métodos Iterativos

Os métodos iterativos são utilizados para encontrar a solução de um sistema de equações lineares descritas como

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (13)$$

com  $n$  equações e  $n$  incógnitas. Uma simples aproximação para uma solução iterativa de um sistema linear é reescrever (13) como uma iteração de ponto fixo linear [8] de modo a obter uma equação iterativa como

$$\vec{x}^{k+1} = G\vec{x}^k + \vec{f} \quad (14)$$

que convirja para a solução do mesmo, onde  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de iteração do método iterativo (14) e  $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$ .

O método de Jacobi e de Gauss-Seidel por ser *splitting* nos permite decompor  $A$ , assim determinou-se que  $G_J = D^{-1}(E + F)$  e  $G_{GS} = (D - E)^{-1}F$ , respectivamente. Seja  $A$  dada por (7) e portanto como  $G_J = D^{-1}(E + F)$  obtém-se que

$$D = \begin{bmatrix} -2 & & & \dots & 0 \\ & -2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -2 & \\ 0 & \dots & & & -2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

e

$$-(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Portanto  $G_J$  é

$$G_J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Pode-se verificar numericamente que os autovalores desta matriz de acordo com [3], são

$$\lambda_k = \cos \left[ \frac{(k-1)\pi}{n-1} \right] \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n. \quad (18)$$

Segundo [8], os autovalores da matriz de iteraç~ao do m~etodo Gauss-Seidel s~ao dados por

$$\mu_k = \left[ \cos \left( \frac{k-1}{n-1} \pi \right) \right]^2 \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (19)$$

e os demais autovalores s~ao iguais a zero.

O teorema 1 revela que os autovalores da matriz de discretizaç~ao bidimensional s~ao justamente dados pela soma dos autovalores da matriz de discretizaç~ao unidimensional.

**Teorema 1** *Se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tem autovalores  $\lambda_i$  e  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tem autovalores  $\mu_j$ , ent~ao a soma de kronecker  $A \oplus B = (I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$  tem  $mn$  autovalores*

$$\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_1 + \mu_m, \lambda_2 + \mu_1, \dots, \lambda_2 + \mu_m, \dots, \lambda_n + \mu_m \quad (20)$$

Para determinar os autovalores de  $G$  no caso bidimensional usou-se o teorema 1, j~a que sabe-se quem s~ao os autovalores de  $G_j$  no caso unidimensional. Para determin~a-los ~e necess~ario conhecer quem s~ao os autovalores no caso unidimensional e estes s~ao dados por (18). Assim os autovalores s~ao fornecidos por

$$\lambda_{i,j} = \frac{\cos \frac{(i-1)\pi}{n-1} + \cos \frac{(j-1)\pi}{n-1}}{2} \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (21)$$

e os autovalores da  $G$  do m~etodo de Gauss-Seidel s~ao

$$\mu_{i,j} = \left[ \frac{\cos \frac{(i-1)\pi}{n-1} + \cos \frac{(j-1)\pi}{n-1}}{2} \right]^2 \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (22)$$

e os demais s~ao iguais a zero.

Quando  $k = 1$  em (21) obt~em-se o autovalor  $\lambda_1 = 1$  e quando  $k = n$  o autovalor ~e  $\lambda_n = -1$  (todos os outros autovalores satisfazem  $|\lambda| < 1$ ). Sendo este em m~odulo o raio espectral da matriz de iteraç~ao para o m~etodo iterativo de Jacobi e tamb~em o de Gauss-Seidel. E assim os m~etodos iterativos em quest~ao, s~ao condicionalmente convergente, e o seu raio espectral ~e dado pelo maior autovalor diferente de  $|\lambda| = 1$  [5, 9].

### 3 Conclus~ao

A matriz gerada a partir do problema de Neumann por ser uma matriz esparsa e tridiagonal permite com facilidade encontrar os autovalores de cada uma das matrizes, a qual seguiu-se a literatura de [9]. Ap~os a obtenç~ao do sistema  $A\vec{p} = \vec{b}$  investigou-se os m~etodos iterativos Jacobi e Gauss-Seidel para a resoluç~ao de sistemas lineares gerado a partir da equa~ao de Poisson. Esta equa~ao exige a utilizaç~ao de condiç~oes de contorno adequadas, a escolha destas n~ao ~e ~unica e a converg~encia do m~etodo depende delas. Ao tratar do problema de Neumann analisou-se as matrizes de iteraç~ao a que se refere aos m~etodos iterativos e obteve-se que o maior autovalor ~e exatamente 1, e de acordo com [8] dever~iamos ter que o raio espectral fosse estritamente menor do que 1 para o m~etodo iterativo ser convergente. A literatura de [5] apresenta teoremas e definiç~oes na qual conseguiu-se encontrar uma f~ormula geral para os autovalores e ent~ao concluiu-se que os m~etodos usados para encontrar a soluç~ao do problema de Neumann ~e condicionalmente convergente, pois encontrou-se que o autovalor  $\lambda = 1$  ~e ~unico, e assim ser~a considerado o segundo maior autovalor como sendo o pseudo raio espectral da matriz de iteraç~ao.

## Referências

- [1] C. T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM, (1995).
- [2] H. J. van Linde, High-order Finite-Difference Methods for Poisson's Equation, *Journal Mathematics of Computation*, 126, (1974), 369–391.
- [3] M. Neumann and R. J. Plemmons, Convergent Nonnegative Matrices and Iterative Methods for Consistent Linear Systems, *Journal Numerical Mathematics*, 31, (1978) 265–279.
- [4] R. J. Plemmons, Regular Splittings and the discrete Poisson-Neumann problem, *Numer. Math* 25, 25 (1976) 153-161.
- [5] C. Pozrikidis, A note on the regularization of the discrete Poisson-Neumann problem, *Journal of Computational Physics*, 172 (2001) 917–923.
- [6] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2nd ed., (2000).
- [7] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, SIAM, 2nd ed., (2004).
- [8] D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, *Academic Press, Inc.*, (1988).
- [9] W-C. Yueh, Eigenvalues of Several Tridiagonal Matrices, *Applied Mathematics E-Notes*, 5 (2005) 66-74.