UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

***CAMPUS* DE BAURU**

UMA INTRODUÇÃO SOBRE LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS

Kleidson Êglicio Carvalho da Silva Oliveira

kecso10@yahoo.com.br

Bauru

2010

Sumário

Resumo: As lógicas não-clássicas foram introduzidas em nosso conhecimento com a intenção de interpretar aspectos que não foram abordados pela lógica clássica. Este trabalho tem a intenção de conceituar essas lógicas e dar alguns exemplos de algumas delas.

1. Introdução

É fato conhecido hoje que existem vários sistemas lógicos formais. O que conhecemos como um sistema lógico clássico aristotélico nem sempre teve sua forma atual, ela variou com o tempo até chegar ao aparato que conhecemos.

Vários estudiosos, desde muito tempo atrás, questionavam se a lógica clássica era suficiente para formalização de toda a realidade, o que vemos que realmente não acontece, então começaram a surgir, formalmente a partir do século XX, sistemas lógicos diferentes do formal, alguns negando os axiomas conhecidos, outros preservando os aspectos da lógica clássica e a ampliando, englobando novos aspectos da realidade e tentando formaliza-los.

Este trabalho tenta mostrar um pouco o que são as lógicas não-clássicas, quando começaram a surgir e quais as principais diferenças entre elas e a clássica, assim como exemplificar algumas e os novos aspectos englobados por elas.

2. Respostas à Pressão Enfrentada pela Lógica Clássica

A lógica clássica, desde muito tempo, sofre pressões significativas sobre sua incapacidade de representar os diferentes tipos de argumentos informais existentes. Já que a lógica é a ciência do pensamento, e tem como papel fundamental o entendimento da lingüística, seria necessário que ela conseguisse formalizar qualquer tipo de argumento. As repostas a esta pressão são descritas a seguir.

i – A primeira resposta, chamada por Haack (1998) de *delimitação do âmbito da lógica* diz que argumentos informais aos quais a lógica clássica não consegue formalizar, não são de interesse da lógica, e portanto, devem ser simplesmente excluídos da mesma.

ii – A segunda resposta quanto a inadequação, diz que os problemas podem ser admitidos dentro do âmbito da lógica, mas devem ser feitas modificações na maneira como tais argumentos são representados no formalismo, para esta resposta daremos o nome de *paráfrase nova*.

iii – A terceira resposta, chamada de *inovação semântica,* conserva o aparato lógico clássico e admite os argumento problemáticos em seu âmbito, mas enquanto mantém a sintaxe da lógica clássica intacto, altera a semântica para melhor adequação no aparato lógico.

iv – Uma outra resposta chamada de *lógica ampliada* diz que o aparato clássico pode ser ampliado para conseguir formalizar argumentos antes não representáveis pela lógica clássica. Novos operadores podem ser criados e regras/axiomas que governem esses operadores. É o que ocorre em nas lógicas modais, temporais e moduladas, por exemplo.

v – Uma quinta reposta diz que enquanto o vocabulário da lógica pode ser mantido o mesmo, os seus axiomas/regras devem ser restringidos de modo que alguns de seus teoremas/inferências deixem de ser válidos, a esta reposta damos o nome de *lógica restrita.*

vi – A sexta resposta, chamada *contestação dos metaconceitos clássicos,* diz que as inovações no formalismo clássico são derivadas por inovações no nível dos conceitos metalógicos. É o caso dos intuicionistas que contestam o conceito de verdade pressuposto na lógica clássica.

vii – Uma última resposta aqui apresentada é conhecida como a resposta da *revisão do âmbito da lógica,* e se difere totalmente da primeira resposta vista. Nesta resposta, defendida pelos intuicionistas, o âmbito da lógica deve ser revisto, e teoremas como '$p \vee \neg p$' não devem ser válidos. Para os intuicionistas, ainda, a lógica tem papel secundário a matemática e, portanto, não é um raciocínio subjacente a todo e qualquer assunto.

Estas são algumas das respostas a pressão feita ao aparato clássico, existem outras que aqui não colocamos, mas estas ilustram bem como se diferem as interpretações do uso da lógica. Para alguns conservadores, as modificações realizadas no aparato clássico, assim como as diferentes delimitações de seu âmbito, acarretam sistemas que não são verdadeiramente lógicas.

3. As Lógicas Não-Clássicas

De acordo com Mortari, a lógica pode ser caracterizada como "o estudo dos princípios e métodos de inferência, ou do raciocínio válido" (Mortari, 2001, p. 349).

Frege (1879) e Russel & Whitehead (1910) formalizaram a implicação material da lógica clássica, enquanto Post (1921) e Wittgenstein (1922) a proveram de uma semântica adequada. Contudo, MacColl (1880) sugeriu que deveria haver um condicional mais estrito, e assim, Lewis (1918) formalizou a implicação estrita, que seria uma ampliação da lógica clássica como conhecida até então.

É interessante lembrar que a lógica clássica como conhecemos foi sendo alterada com o passar dos tempos, para algumas adequações, contudo, Kant (1800) acreditava que a lógica aristotélica era uma ciência completa, acabada. Porém, no século após Kant houve um desenvolvimento de novas técnicas lógicas, impulsionados principalmente pelos trabalhos de Boole, Frege, Pierce e Russel.

As utilidades da lógica clássica são realmente surpreendentes, há diversos tipos de argumentos que podem ser formalizados através dela, mas existem alguns que não são possíveis de ser formalizados pelos métodos clássicos, para a tentativa de formalização de todo e qualquer argumento, é que novas lógicas são criadas, estas são ditas lógicas não-clássicas.

As lógicas não-clássicas seguem basicamente uma ou mais das três características seguintes, sendo elas:

i – são baseadas em linguagens mais ricas em poder de expressão;

ii – são baseadas em princípios distintos;

iii – admitem semânticas distintas.

Susan Haack (1998) considera que existem dois tipos principais de lógicas não-clássicas: as que são *complementares,* por não negarem os axiomas/regras da lógica clássica, mas apenas ampliarem a lógica com novos operadores/quantificadores e criarem regras/axiomas para estes novos operadores/quantificadores com a intenção de aumentar o escopo da lógica. E as *alternativas,* que negam algum ou todos os axiomas da lógica clássica e pretendem substituí-la em muitos ou todos domínios da lógica clássica.

Alguns exemplos de lógicas não-clássicas complementares são: as lógicas modais, com seus operadores de necessidade e possibilidade, as lógicas deônticas, com seus operadores de proibido, permitido, indiferente e obrigatório, as lógicas do tempo com seus operadores temporais, as lógicas epistêmicas e as lógicas de primeira ordem estendidas (lógicas moduladas.

Alguns exemplos de lógicas não-clássicas alternativas são: as lógicas não reflexivas (que não admitem o princípio da identidade), as lógicas intuicionistas (que por exemplo negam o teorema '$p \vee \neg p$' da lógica clássica), as lógicas multivaloradas (também denominadas lógicas paracompletas quando negam o princípio do terceiro excluído) e as lógicas paraconsistentes que derrogam o princípio da não-contradição.

No próximo item estudaremos alguns conceitos de uma lógica não-clássica complementar, e no seguinte alguns conceitos de uma lógica não-clássica alternativa.

4. Uma Lógica Complementar: A Lógica Modal Alética

A lógica modal trata dos conceitos de necessidade e possibilidade, nela uma proposição além de poder ser verdadeira ou falsa, pode ser necessária (necessariamente verdadeira) ou impossível (necessariamente falsa). O próprio adjetivo "modal" vem da expressão "modos de verdade" significando o que dissemos acima, das novas possibilidades de uma proposição e o adjetivo "alética" deriva da palavra grega que significa "verdade".

Das lógicas não-clássicas, a lógica modal é uma das mais discutidas desde a antiguidade, porém sem sua formalização. Aristóteles e seu sucessor Teofrasto se ocuparam dos conceitos modais, formulando uma teoria dos silogismos modais, mas sem um desenvolvimento satisfatório. Os primeiros sistemas da lógica modal só surgiram no século XX através dos trabalhos de Lewis (1918) sobre a lógica modal proposicional, seguido por Ruth B. Marcus (1946) com seu trabalho sobre o cálculo modal de predicados.

Lewis não estava inicialmente interessado em investigas as noções de necessidade e possibilidade de uma proposição, ele procurava um jeito de encontrar uma implicação mais rigorosa que a implicação material.

Em seus trabalhos Lewis acabou por desenvolver a implicação estrita, que pode ser definida da seguinte maneira:

$$(\alpha \prec \beta) \leftrightarrow \neg \Diamond (\alpha \wedge \neg \beta)$$

Na qual $\alpha \prec \beta$ significa "α implica estritamente β". Lê-se $\Diamond$ como "é possível que", temos que α implica β se é impossível que α e não β.

Depois de formalizar sua implicação estrita, Lewis percebeu que necessitava de uma teoria lógica das modalidades para fundamentar seu conceito de implicação. Para isso ele adicionou os operadores $\Diamond$ e $\Box$ à linguagem da lógica clássica, significando:

$\Diamond$ α: é possível que α/ possivelmente α

$\Box$ α: é necessário que α/necessariamente α

Como novos operadores foram introduzidos na linguagem, temos que acrescentar uma cláusula a definição de fórmula:

- Se α é uma fórmula, então $\Diamond$ α e $\Box$ α são fórmulas.

Com estes novos operadores, podemos formalizar por exemplo, sentenças como:

É possível que faça calor e é possível que faça sol.

Necessariamente, se faz sol, então, faz calor.

Usando C para "faz calor" e S para "faz sol" temos:

$$\Diamond C \wedge \Diamond S,$$

$$\Box (S \rightarrow C).$$

Um estudo mais aprofundado da lógica modal, sua semântica e o conceitos de modelos de mundos possíveis podem ser investigados em Mortari (2001) e Haack (1998). Agora passaremos para um exemplo de lógica clássica alternativa.

5. A Lógica do Muito

Antes de entrarmos propriamente na Lógica do muito, temos de saber alguns conceitos que serão usados para sua criação.

5.1. Família Fechada Superiormente

Definição 5.1.1.1. (Grácio, 1999, p. 79): Uma família fechada superiormente F sobre um conjunto universo E é uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as seguintes condições:

(i) se $B \in F$ e $B \subseteq C$, então $C \in F$;

(ii) $E \in F$.

Proposição 5.1.1.2. (Grácio, 1999, p. 79): O conjunto das partes de A, $\mathcal{P}(A)$, é uma família fechada superiormente sobre A.

Demonstração: Para todos B, $C \subseteq A$, se $B \in \mathcal{P}(A)$ e $B \subseteq C$, então $C \in \mathcal{P}(A)$, além disso, $A \in \mathcal{P}(A)$. Logo, $\mathcal{P}(A)$ é uma família fechada superiormente sobre A. ■

Definição 5.1.1.3. (Grácio, 1999, p. 80): Uma família fechada superiormente própria F sobre um conjunto universo E é uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as seguintes condições:

(i) se $B \in F$ e $B \subseteq C$, então $C \in F$;

(ii) $E \in F$;

(iii) $\varnothing \notin F$.

Definição 5.1.1.4. (Grácio, 1999, p. 80): Uma família fechada superiormente em que $\varnothing \in F$ é denominada Família Fechada Superiormente Imprópria.

Para a formalização do conceito de "muitos", Grácio (1999) utiliza a definição de Família Fechada Superiormente Própria.

5.2. Formalizando logicamente o quantificador muito

A lógica do muito é uma das lógicas moduladas introduzidas por Grácio (1999) e é caracterizada pela inclusão de um novo quantificador, o qual não pode ser definido a partir dos quantificadores da lógica de primeira ordem

($\forall$ e $\exists$), destinado à formalização do conceito de “muitos”, presente na linguagem natural.

A lógica do muito tem por intuito formalizar expressões como “muitos brasileiros gostam de refrigerante”, “muitas garotas ‘amadurecem’ mais rapidamente que os garotos”, “muitos carros usam gasolina como combustível”, etc., as quais se referem a um “conjunto grande de evidências”, mas que não precisa necessariamente ser interpretado como a “maioria” do universo e nem significa que a expressão “muitos” se refere a uma quantidade específica de pessoas/objetos que possuem uma propriedade.

Para essa formalização, Grácio (1999) introduz um novo quantificador M na linguagem clássica de primeira ordem. Assim uma expressão da forma $Mx\ \varphi(x)$ significa que “para muitos x, $\varphi(x)$”.

Se $\mathcal{L}$ é a lógica de primeira ordem com identidade. A lógica do muito $\mathcal{L}(M)$ é construída do seguinte modo.

Os axiomas de $\mathcal{L}(M)$ são os axiomas de $\mathcal{L}$ acrescidos dos seguintes axiomas do quantificador M:

(Ax1) $\forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Mx\ \varphi(x) \leftrightarrow Mx\ \psi(x))$

(Ax2) $Mx\ \varphi(x) \rightarrow My\ \varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$

(Ax3) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ \varphi(x)$

(Ax4) $Mx\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$

(Ax5) $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ \psi(x))$.

Os dois primeiros axiomas têm a função de adequar o modelo proposto para esta lógica. Os axiomas Ax3, Ax4 e Ax5 são específicos para a lógica do muito e possuem as seguintes características intuitivas:

Ax3 – Se todos indivíduos do universo satisfazem a sentença φ, então φ é verdadeira para muitos indivíduos;

Ax4 – Se muitos indivíduos do universo satisfazem a sentença φ, então existe algum indivíduo que satisfaz φ;

Ax5 – Se todos os indivíduos do universo que satisfazem φ também satisfazem ψ, então se muitos indivíduos satisfazem φ, muitos indivíduos satisfazem ψ.

Sendo assim, vários exemplos podem ser formalizados via a lógica do muito. Sejam B(x), C(x), D(x) e E(x) símbolos de predicados de L(M) que expressam, respectivamente, "x é homem", "x é criança", "x gosta de doces" e "x gosta de futebol". Considerando o universo de paulistanos podem-se formalizar algumas sentenças, como:

"Muitos paulistanos são homens" por Mx H(x);

"Muitos paulistanos são crianças" por Mx C(x);

"Muitos paulistanos gostam de doces" por Mx D(x);

"Muitos paulistanos gostam de futebol" por Mx E(x).

Podemos ainda, formalizar as seguintes sentenças:

"Muitos paulistanos são homens e crianças" por Mx $(H(x) \wedge C(x))$;

"Muitos paulistanos são homens e gostam de doces" por Mx $(H(x) \wedge D(x))$

"Muitos paulistanos gostam de doces e de futebol" por Mx $(D(x) \wedge E(x))$;

"Muitos paulistanos são homens e gostam de futebol" por Mx $(H(x) \wedge E(x))$;

"Muitos paulistanos são crianças e gostam de doces" por Mx $(C(x) \wedge D(x))$;

"Muitos paulistanos são crianças e gostam de futebol" por Mx $(C(x) \wedge E(x))$.

As regras de inferência de $\mathcal{L}$(M) são as mesmas de $\mathcal{L}$, nominalmente:

- Modus Ponens (MP): de φ e $\varphi \rightarrow \psi$ deduzimos ψ;
- Generalização (Gen): de φ deduzimos $\forall x\ \varphi$.

5.3. Semântica da lógica do muito

A lógica do muito é composta por uma estrutura de primeira ordem A, com universo A, dotada por uma família própria de conjuntos fechados superiormente $\mathcal{F}$ e denotada por $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$.

Formalmente temos $\mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash$ Mx $\varphi(x)$ see $\{a \in A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}} \vDash \varphi(a)\} \in F$. Com o significado de que muitos indivíduos x têm (ou satisfazem) a propriedade $\varphi(x)$ na estrutura $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}$ se, e somente se, o conjunto de elementos $a \in A$ que satisfaz a propriedade φ está na família própria de conjuntos fechados superiormente $\mathcal{F}$.

5.4. Teoremas de $\mathcal{L}(M)$

Apresentamos nesta seção alguns teoremas demonstráveis na lógica do muito.

Teorema: As seguintes sentenças são teoremas:

(i) $Mx\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$;

(ii) $Mx\ \varphi(x) \wedge Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$;

(iii) $\neg Mx\ (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$;

(iv) $Mx\ \varphi(x) \vee Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$

Demonstração:

(i) $Mx\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$:

1. $\varphi \vee \neg\varphi$ teorema de L(M)
2. $\forall x\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ Gen 1
3. $\forall x\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ Ax3
4. $Mx\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ MP 3,2

(ii) $Mx\ \varphi(x) \wedge Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$:

1. $\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ Ax1
2. $\forall x\ (\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ Ax1
3. $\forall x(\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ teorema de $\mathcal{L}(M)$
4. $\forall x(\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ teorema de $\mathcal{L}(M)$
5. $Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$ MP 1, 3
6. $Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$ MP 2, 4
7. $(Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge (Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ regra do $\wedge$
8. $(Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge (Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow ((Mx\ \varphi(x) \wedge Mx\ \psi(x)) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ tautologia
9. $(Mx\ \varphi(x) \wedge Mx\ \psi(x)) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$ MP 7, 8

(iii) $\neg Mx\ (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$:

1. $\neg\exists x\ (\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$ teorema de $\mathcal{L}(M)$

2. $Mx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$ Ax2

3. $(Mx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))) \rightarrow (\neg\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Mx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)))$ teorema de $\mathcal{L}(M)$

4. $\neg\exists x(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)) \rightarrow \neg Mx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x))$ MP 2, 3

5. $\neg Mx(\varphi(x) \wedge \neg\varphi(x)))$ MP 1, 2

(iv) $Mx\ \varphi(x) \vee Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$:

1.$\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ Ax1

2.$\forall x\ (\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow (Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ Ax1

3.$\forall x(\varphi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ teorema de $\mathcal{L}(M)$

4.$\forall x(\psi(x) \rightarrow (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ teorema de $\mathcal{L}(M)$

5. $Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$ MP 1, 3

6. $Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$ MP 2, 4

7. $(Mx\ \varphi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge (Mx\ \psi(x) \rightarrow Mx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ regra do $\wedge$

8. $(Gx\ \varphi(x) \rightarrow Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \wedge (Gx\ \psi(x) \rightarrow Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))) \rightarrow ((Gx\ \varphi(x) \vee Gx\ \psi(x)) \rightarrow Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x)))$ tautologia

9. $(Gx\ \varphi(x) \vee Gx\ \psi(x)) \rightarrow Gx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$ MP 7, 8 ■

6. Exemplo de Lógicas Alternativas: Lógicas Polivalentes

As lógicas polivalentes surgiram em princípio com os trabalhos do polonês Jan Lukasiewicz, a partir de 2920, e de Emil Post (1921). As lógicas polivalentes têm o atributo de não possuir o princípio da bivalência, podendo ser atribuídos outros valores, no começo, Lukasiewicz formulou uma lógica trivalente, e mais tarde, com mais valores.

A motivação filosófica para a formulação de tal lógica foi que se a lógica clássica bivalente implicar num determinismo, então ocorrerá a inexistência do livre arbítrio.

Exemplificando, temos:

João, no próximo natal, estará em Brasília.

De acordo com o princípio da bivalência, esta proposição acima só pode ser verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, então João estará em Brasília no próximo natal, se falsa, ele não pode de jeito algum estar em Brasília no próximo natal. Como estes são os únicos valores para esta proposição, o futuro de João está predeterminado e nada se pode fazer para mudá-lo.

Lukasiewicz considerava este argumento como sendo válido, porém não gostava do determinismo que ele implicava, então ele atribuiu um terceiro valor a uma proposição, o **I,** sendo este *indeterminado.* A indeterminação significa, neste caso, que a proposição não é nem verdadeira e nem falsa.

Uma das fórmulas válidas que não se aplicam a esta lógica é a $p \vee \neg p$, pois quando p recebe o valor **I,** o valor de $\neg p$ também seria **I,** e o valor de $p \vee \neg p$ será **I**. Como as fórmulas válidas têm valor **V,** então essa não é uma fórmula válida.

Esta não é a única fórmula válida na lógica clássica que não é válida na lógica trivalente de Lukasiewicz. Outra fórmula como $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$ também não é válida nesta lógica Ł$_3$ de Lukasiewicz.

Algo que permanece na lógica Ł$_3$ é a definição de $\alpha \leftrightarrow \beta$ como $(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\alpha\rightarrow\beta)$.

É Interessante saber que não foi Lukasiewicz quem axiomatizou sua lógica Ł$_3$, mas sim M. Wajsberg em 1931. O conjunto de axiomas é o seguinte:

$A\beta\gamma\ (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

i – $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

ii – $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

iii – $((\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

A única regra de inferência que continua é a *modus ponens*.

Lukasiewicz, além desta sua lógica Ł$_3$, fez outras lógicas de mesma natureza, tais como a lógica tetravalente, e, de modo geral, uma lógica n-valente Ł$_n$ para cada número natural n. Depois destas, ele introduziu uma lógica com infinitos valores de verdade, uma lógica infinitovalente, onde cada número real do intervalo [0, 1] é um valor da lógica.

As aplicações mais comuns das lógicas polivalentes são na área de computação, como por exemplo no tratamento da informação em condições de incerteza.

Mais sobre outras lógicas alternativas pode ser visto em Mortari (2001) e Haack (1998).

7. Considerações Finais

É correto afirmar que o leque de possibilidades da lógica clássica é enorme, e que por muito tempo ela foi a única lógica a ser utilizada nos mais diferentes domínios do conhecimento humano. Mas temos de admitir que nosso pensamento não seja de todo clássico, e que muitas vezes nos vemos em situações onde apenas dois valores de verdade não podem ser aplicados.

Por estes e outros motivos, um estudo aprofundado das lógicas não-clássicas deve ser feito, já que elas contribuem para a melhoria do aparato lógico e englobam aspectos que ficaram pendentes da lógica clássica.

Bibliografia

MORTARI, C. A. *Introdução à Lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2001. p. 349 – 390.

HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 1998. p. 207 – 288.

FEITOSA, H. A; PAULOVICH, L. *Um Prelúdio à Lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2005. p. 185 – 190.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência), Instituto de

Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. 194 p.

PAZ-TRILLO, C. D. *Lógica Modal e Intencionalidade Aplicado ao Português do Brasil*. 2004.

D'OTTAVIANO, I. M. L; FEITOSA, H. A. *Sobre a História da Lógica, a Lógica Clássica e o Surgimento das Lógicas Não-Clássicas*. 2003.