

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DA UNESP DE BAURU

22ª ORMUB - 2014

3º ANO DO ENSINO MÉDIO

**Questão 1:** Seja  $r$  a reta  $4x + 7y - 56 = 0$  que intercepta o eixo das ordenadas no ponto  $A$  e o eixo das abscissas no ponto  $B$ . Considere uma reta  $S$ , que passa pela origem  $O = (0,0)$  e intercepta a reta  $r$  em um ponto  $C$ , de modo que a área do triângulo  $OCB$  seja igual à metade da área do triângulo  $OAB$ . Com base nessas informações determine as possíveis coordenadas de  $C$ , e a correspondente equação de  $S$ .

**Questão 2:** Um aluno chegou atrasado na sala e o professor já havia começado a explicação de um exercício e apagado uma parte dele. Na lousa havia uma matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & \dots \\ 4 & \dots \end{bmatrix}$  com dois de seus elementos apagados. Na continuação da lousa havia uma

outra parte do exercício que dizia:  $\det(A) = 8$  e  $\det(A + A^t) = 16$ . Fazendo alguns cálculos ele descobriu quem era a matriz  $A$ . Você seria capaz de descobrir também? Quantas possibilidades existem para a matriz  $A$ ?

**Questão 3:** Um jogador de sinuca participou de 4 jogadas em um torneio: na primeira colocou 1 bola no buraco; na segunda colocou 2 bolas no buraco; na terceira distraiu-se e não jogou e, finalmente, na quarta colocou um bola no buraco. Ao perceber sua distração ficou imaginando quantas bolas poderia ter acertado na terceira jogada. Então resolveu determinar um polinômio de grau máximo  $n$  da forma  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , que passasse pelos pontos  $A(1,1)$ ,  $B(2,2)$  e  $C(4,1)$ , em que  $x$  representa as jogadas e  $y = P_n(x)$  o número de bolas, e que fosse único. Pergunta-se:

- Para que valor de  $n$  teríamos esse único polinômio passando pelos três pontos? Justifique sua resposta;
- Determine esse polinômio e estime o número de bolas colocadas no buraco se ele tivesse jogado na terceira jogada.

**Questão 4:** Determine o valor máximo de  $\sin \theta + \cos \theta$ , com  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

**Questão 5:** Na época da segunda guerra mundial a teoria dos números desempenhou um papel fundamental. Muitas mensagens importantes, tais como, posicionamento de tropas e armamentos, eram criptografadas e exigiam o conhecimento de um determinado número-chave, para liberar o acesso ao seu conteúdo e caso o número-chave informado fosse incorreto a mensagem se destruíria. Imagine que você é um membro do exército americano, na segunda guerra mundial, e que tem a chance de se tornar um herói, caso descubra o número-chave para uma mensagem que diz a exata posição dos exércitos alemães. Determine o número chave desta mensagem sabendo que ele é o resto da divisão por 5 do número  $7^{777}$ .