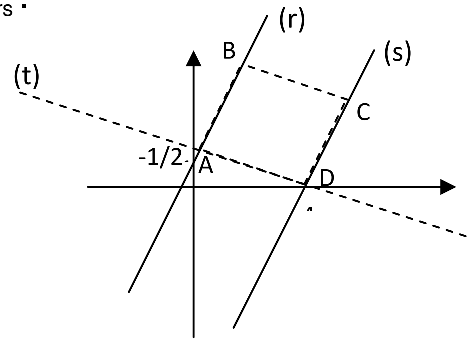
PROVA DA 3ª SÉRIE - ORUMB - 2010

1ª Questão: Determine a área do quadrado ABCD que tem o lado AB sobre a reta $(r): 2x - y + 1 = 0$ e o lado CD sobre a reta $(s): 2x - y - 8 = 0$.

Solução: Como as retas (r) e (s) são paralelas, o quadrado formado por elas será o mesmo qualquer que sejam seus vértices A e B sobre (r) e C e D sobre (s), cuja media do lado do quadrado é o segmento $\overline{AD} = \overline{BC} = d_{rs}$, onde d_{rs} é a distância entre as retas (r) e (s). Portanto, a área do quadrado é $S = d_{rs}^2$.

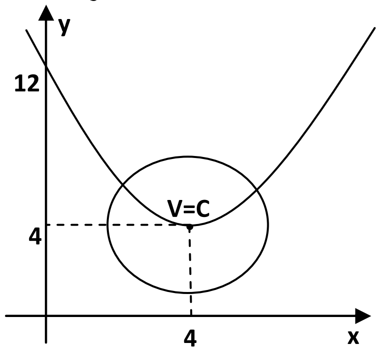


A reta (t) de coeficiente angular m_t é perpendicular à reta (s) de coeficiente angular $m_s = 2$, satisfazendo $m_t = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{2}$. A reta (t) passa pelo ponto D(4,0). Assim, pela fórmula $(t): (y - y_0) = m_t(x - x_0) \Rightarrow (t): y = -\frac{1}{2}x + 2$. Temos que o vértice $A = (r) \cap (t)$. Então:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$$. Pela fórmula da distância entre dois pontos, determinamos a distância entre A e D: $d_{AD} = d_{rs} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Rightarrow d_{rs} = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{9}{5} - 0\right)^2} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$.

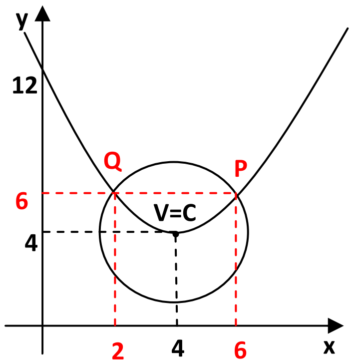
Como a área é $S = d_{rs}^2 \Rightarrow S = \frac{81}{5}$ u.a.

2ª Questão: Na figura abaixo temos um circunferência de centro C e raio $r = 2\sqrt{2}$ e uma parábola de vértice V. Sabendo que V=C e que a parábola intercepta o eixo Oy em y=12, determine os pontos de interseção entre a circunferência e a parábola.



Solução: A equação de uma circunferência de centro C(m,n) e raio r é dada por $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Como C(4,4), então $(x-4)^2+(y-4)^2=8$. A função quadrática (função do 2º grau) cujo gráfico é uma parábola é dada por $y=ax^2+bx+c$. Sabemos que o vértice da parábola pode ser determinado por $V=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Como V=(4,4), teremos: $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=4\Rightarrow b=-8a\\ -\frac{\Delta}{4a}=4\Rightarrow \Delta=-16a\end{cases}$. $\Delta=b^2-4ac=-16a\Rightarrow(-8a)^2=-16a\Rightarrow 64a^2-4ac=-16a\Rightarrow$ $64a^2-4a(c-4)=0\Rightarrow$ $16a^2-a(c-4)=0$. Como o ponto (0,12) pertence à parábola então c=12. Logo: $16a^2-a(12-4)=0$ $\Rightarrow$ $16a^2-8a=0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a=0\,(\text{não convém})\\ a=\frac{1}{2}\Rightarrow b=-4\end{cases}$. Assim, a equação da parábola é $y=\frac{1}{2}x^2-4x+12$. Determinando a interseção entre as curvas, termos: $\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=8\Rightarrow x^2-8x+24+y^2-8y=0\\ y=\frac{1}{2}x^2-4x+12\Rightarrow 2y=x^2-8x+24\end{cases}$ $\Rightarrow$ $y^2-6y=0\Rightarrow$ $\begin{cases}y=0\,(\text{não convém})\\ y=6\end{cases}$. Para y = 6 em $(x-4)^2+(y-4)^2=8$ $\Rightarrow$ $(x-4)^2+(6-4)^2=8$ $\Rightarrow$ $(x-4)^2=4$ $\Rightarrow$ $x-4=\pm2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x=6\\ x=2\end{cases}$.

Portanto, os pontos de interseção entre as curvas são: P(6,6) e Q(2,6).



3ª Questão: Sabendo-se que 1 é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-1)$ e 2 é o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-2)$, determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-1)(x-2)$.

Solução: Pelo que foi dito sabemos que existem polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ tais que são válidas $\begin{cases}p(x)=q_1(x)\,(x-1)+1\\ p(x)=q_2(x)(x-2)+2\end{cases}$ segue que existem polinômio $q_3(x)$ e $a,b\in\mathbb{R}$, tais que

$p(x)=q_3(x)\,(x-1)(x-2)+r(x)=q_3(x)\,(x-1)(x-2)+ax+b$. Uma vez que $p(1)=1$ e $p(2)=2$ temos que $\begin{cases}a+b=p(1)=1\\ 2a+b=p(2)=\ 2\end{cases}$. Equivalentemente $\begin{cases}a+b=1\\ a=1\end{cases}$ e assim, $a=1$ e $b=0$.

Portanto o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-1)(x-2)$ é $r(x)=x$.

4ª Questão: Um paciente recebe via intravenosa um medicamento à taxa constante de 1,5 mL/min. O frasco do medicamento é formado por uma parte cilíndrica, de raio 4 cm e altura 9 cm, seguida por uma parte cônica de mesmo raio e altura 3 cm. Este frasco estava cheio quando se iniciou a medicação e, após 4 h de administração contínua, a medicação foi interrompida. Dado que 1 cm^3 = 1 mL, e usando a aproximação π=3, calcule o volume, em mL, do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação.

Solução: Dado que a taxa em que o medicamento é recebido é de 1,5 mL/min, após 4h=240 min o paciente terá recebido 1,5 x 240 = 360 L do medicamento. Agora, quando se iniciou a medicação o frasco estava cheio, então o volume de medicamento era de:

$V = \pi.\ 4^2.\ 9 + 1/3.\ \pi.4^2.3$,

ou seja, devemos somar o volume da parte cilíndrica com o volume da parte cônica. Logo,

$V = 144\ \pi + 16\ \pi = 160\ \pi = 480$ mL

Portanto, o volume do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação é de

480 mL – 360 mL = 120 mL

5ª Questão: Seja $z = a + bi$ um número complexo que satisfaz a seguinte relação: $\dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}} = 2i$.

Determine o número complexo $w = \dfrac{z^2 - (\bar{z})^2}{z \cdot \bar{z}}$.

Solução: Se $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Então: $\dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}} = \dfrac{a+bi+a-bi}{a+bi-a+bi} = \dfrac{2a}{2bi} = -\dfrac{a}{b}i \Rightarrow -\dfrac{a}{b}i = 2i \Rightarrow$ $a = -2b$. Logo, $z = -2b + bi$ e $\bar{z} = -2b - bi$. Podemos escrever: $z = b\cdot(-2+i)$ e $\bar{z} = b\cdot(-2-i)$. Então: $w = \dfrac{z^2 - (\bar{z})^2}{z\cdot\bar{z}} = \dfrac{b^2\cdot(-2+i)^2 - b^2\cdot(-2-i)^2}{b\cdot(-2+i)\cdot b\cdot(-2-i)} = \dfrac{b^2\cdot\left[(-2+i)^2 - (-2-i)^2\right]}{b^2\cdot(-2+i)\cdot(-2-i)} \Rightarrow$

$w = \dfrac{4 - 4i + i^2 - 4 - 4i - i^2}{5}$. Portanto, $w = -\dfrac{8i}{5}$