1ª Questão – Considere-se a circunferência de equação:

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3.$$

Determinar a área da região do plano *Oxy*, acima do eixo *Ox*, limitada por este eixo e pela circunferência.

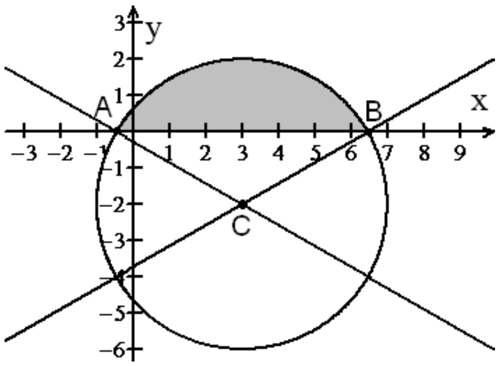
Resolução.

Para encontrar o centro e o raio da circunferência, precisamos encontrar sua equação reduzida.

$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 3 + 9 + 4 = 16 \Rightarrow$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$. Assim, a circunferência tem raio 4 e centro C =(3, -2)

E seu gráfico é dado abaixo.



Os pontos da interseção da circunferência com o eixo dos x são obtidos fazendo y=0 na equação da circunferência:

$x^2 - 6x - 3 = 0$, o que resulta em dois valores para x (aplicando a fórmula de Bhaskara):

x = $3+2\sqrt{3}$ e x = $3-2\sqrt{3}$. Assim, os pontos da interseção da circunferência com o eixo dos x são: A = ($3+2\sqrt{3}$, 0) e B = ($3-2\sqrt{3}$, 0).

Equações das retas que passam por C e A e por C e B:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3+2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3-2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ o que resulta em

y = $\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} - 2$ e y = $-\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} - 2$.

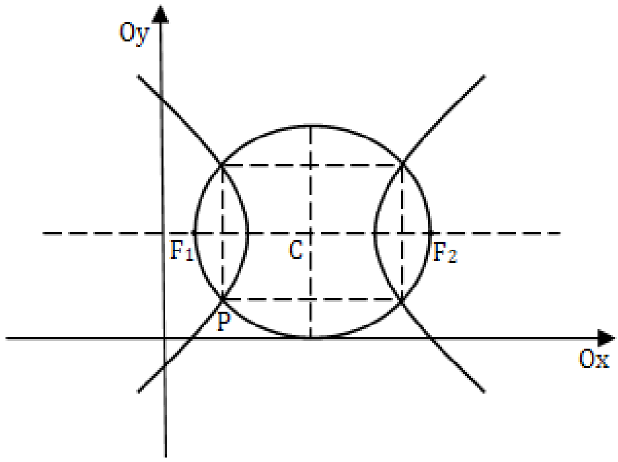
Ângulo determinado pelas retas: tg θ = $\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{3})}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow$ θ = 60º, ou seja, os ângulos determinados pelas duas retas são 60º e 180º - 60º = 120º. No caso, o ângulo ACB é de 120º, pois é o maior ângulo.

A área do setor circular será dada então por $\pi r^2/3 = \pi 4^2/3 = (16/3)\pi$.
A área procurada é então a área do setor circular menos a área do triângulo ABC:

$$(16/3)\pi - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3+2\sqrt{3} & 0 & 1 \\ 3-2\sqrt{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = (16/3)\pi - 4\sqrt{3} \approx 9{,}83.$$

****

2) Na figura abaixo temos uma circunferência concêntrica com uma hipérbole de eixo focal horizontal, centro no ponto C e focos F_1 e F_2. Sabendo que a equação geral da hipérbole é $5x^2 - 4y^2 - 40x + 24y + 34 = 0$, determine a ordenada do ponto P, interseção da circunferência com a hipérbole.



SOLUÇÃO: Completando os quadrados e escrevendo a equação reduzida da hipérbole:

$$5\left(\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{(x-4)^2} - 16\right) - 4\left(\underbrace{y^2 - 6y + 9}_{(y-3)^2} - 9\right) + 34 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Centro}: C(4,3) \\ a^2 = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}$$

A distância focal da hipérbole é: $\overline{F_1F_2} = 2c \Rightarrow$ raio da circunferência é $r = c$. Pela relação notável da hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow c = 3$. Como a circunferência é concêntrica com uma hipérbole, então o centro da circunferência é C(4,3) e sua equação reduzida será: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$.

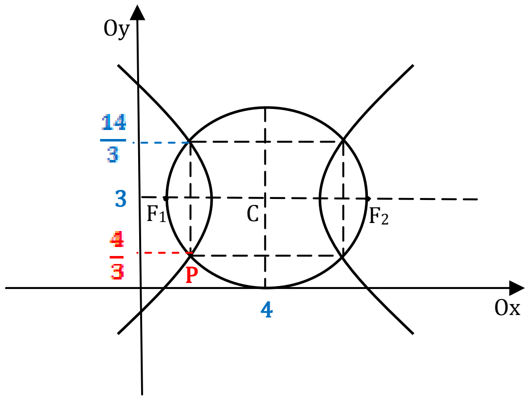
Determinando as interseções entre as duas cônicas teremos:

$(x-4)^2+(y-3)^2=9 \Longrightarrow (x-4)^2=9-(y-3)^2$. Substituindo na equação reduzida da hipérbole teremos:

$5(x-4)^2-4(y-3)^2=20 \Rightarrow 5[9-(y-3)^2]-4(y-3)^2=20 \Rightarrow$

$45-5(y-3)^2-4(y-3)^2=20 \Rightarrow (y-3)^2=\frac{25}{9} \Rightarrow y-3=\pm\frac{5}{3} \Rightarrow$

$\begin{cases} y_1=\frac{14}{3} \text{ (não convém)} \\ y_2=\frac{4}{3} \end{cases}$



****

3) Considere os polinômios

$A(x)=3x^4+10x^3-11x^2+2x$ e $B(x)=3x^2-2x$

e o quociente $Q(x)$ resultante da divisão de $A(x)$ por $B(x)$. Determine, caso existam, os pontos onde o gráfico da função $y=Q(-x)$ intercepta o eixo Ox.

Resolução. Efetua-se, primeiramente, a divisão de $A(x)$ por $B(x)$, como segue:

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^4+10x^3-11x^2+2x & 3x^2-2x \\ \cline{3-3} & -3x^4+2x^3 & x^2+4x-1 \\ \hline & 12x^3-11x^2+2x & \\ & -12x^3+8x^2 & \\ \hline & -3x^2+2x & \\ & 3x^2-2x & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Logo, $Q(x)=x^2+4x-1$ e, portanto, $Q(-x)=(-x)^2+4(-x)-1=x^2-4x-1$. Para determinar os pontos em que o gráfico da função $y=Q(-x)$ intercepta o eixo Ox, faz-se:

$Q(-x)=0 \Rightarrow x^2-4x-1=0 \Rightarrow x=2+\sqrt{5}$ ou $x=2-\sqrt{5}$

Assim, os pontos procurados são:

$P_1\left(2+\sqrt{5},0\right)$ e $P_2\left(2-\sqrt{5},0\right)$.

****

4) Um automóvel parte de Bauru em direção a Belo Horizonte a uma velocidade de 80 Km/h. Após andar durante uma hora nesta velocidade, o motorista perde a paciência e vai aumentando gradativamente a velocidade, de modo que a cada hora ele aumenta a velocidade em 10%, e a mantém constante por 1 hora, o que mostra que o motorista não estava tão impaciente. Considerando que o nível de espanto é uma função em relação à velocidade e é dada pela fórmula:

$E(v) = -v$ se $v < 0$

$E(v) = 0$ se $0 \leq v \leq 100$

$E(v) = v-100$ se $v>100$

a) Calcule o espanto do operador de radar ao verificar a velocidade com que o carro chega ao seu destino, sabendo-se que para isso precisa percorrer 731 Kms.

b) Qual a distância percorrida após 75 minutos de viagem?

c) Indique qual seria a velocidade final se o motorista rodasse durante 1.230 minutos e qual seria a distância percorrida?

d) Faça o gráfico da função nível de espanto, dada acima.

Resolução.

a) Na 1ª hora ele andou 80 Kms, na 2ª andou 88 Kms, na 3ª andou 96,8 Kms, na 4ª andou 106,48 Kms, na 5ª andou 117, 128 Kms, na 6ª andou 128,8408 Kms, na 7ª andou 141,72488 Kms.

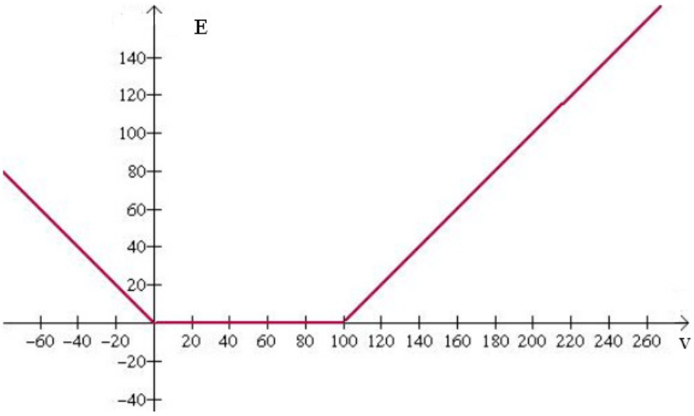
Assim, no final da 6ª hora rodou 617,2488 Kms, portanto chega ao seu destino durante a 7ª hora e sua velocidade de chegada é de 141,72488 Km/h. Logo, o nível de espanto é E(141,72488) = 141,72488 - 100 = 41,72488

b) 80 + 88/4 = 102 Kms.

c) A velocidade do carro, tomada de hora em hora, forma uma progressão geométrica de razão 1,1 e termo inicial igual a 80.

Também, 1230 minutos é igual a 20 horas e trinta minutos. Assim, a velocidade seria a da 20ª hora, ou seja, velocidade = $80x(1,1)^{20}$ Km/h.

d)



****

5) Sejam dois números complexos tais que a soma e o produto deles são números reais. O que podemos concluir a respeito desses números?

Resolução.

$z = a + bi$ e $w = c + di$

$z + w = (a + c) + (b + d)i$ é real $\Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow b = -d$ (1)

$z.w = (ab - cd) + (ad + bc)i$ é real $\Rightarrow ad + bc = 0$ (2)

De (1) e (2): $ad - dc = 0 \Rightarrow (a - c)d = 0 \Rightarrow d = 0$ ou $a = c \Rightarrow$

$b = d = 0$ ou ($a = c$ e $b = -d$) (de (1)) $\Rightarrow$

z e w são números reais ou z é o conjugado de w.