Questão 1: Um número complexo é um número na forma $a+bi$, onde ***a*** e ***b*** são números reais e $i^2 = -1$. Encontrar o número complexo que é o resultado de $\frac{(2+3i)^{79}}{(3-2i)^{81}}$.

<u>Resolução:</u> Vamos reescrever a expressão dada :

$$\frac{(2+3i)^{79}}{(3-2i)^{81}} = \frac{(2+3i)^{79}}{(3-2i)^{79}} \frac{1}{(3-2i)^2} = \left[\frac{(2+3i)}{(3-2i)}\right]^{79} \frac{1}{(3-2i)^2} =$$

$$= \left[\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}\right]^{79} \frac{1}{(3-2i)^2} = \left[\frac{6+4i+9i-6}{9+6i-6i+4}\right]^{79} \frac{1}{(3-2i)^2} =$$

$$= \left(\frac{13i}{13}\right)^{79} \frac{1}{(3-2i)^2} = i^{79} \frac{1}{9-12i-4} = i^{79} \frac{1}{5-12i} \frac{(5+12i)}{(5+12i)} =$$

$$= i^{79} \frac{5+12i}{25+60i-60i+144} = i^{79} \frac{5+12i}{25+144} = (-i)\left(\frac{5+12i}{169}\right) =$$

$$= (-i)\left(\frac{5}{169} + \frac{12i}{169}\right) = \frac{-12}{169} - \frac{5i}{169}$$

Questão 2: Um cesto tem capacidade para 300 ovos, mas não está totalmente cheio. Se forem retirados 2 ovos de cada vez, ao final sobra 1 ovo no cesto; se forem retirados 3 ovos de cada vez, sobram 2 ovos; se forem retirados 5 ovos de cada vez, sobram 4 ovos; se forem 7 ovos de cada vez, o cesto fica vazio. Quantos ovos estão no cesto antes de se iniciar o processo de retirada dos ovos?

<u>Resolução</u>: Designemos por n a quantidade de ovos no cesto.

<u>Se retirarmos os ovos 2 de cada vez, no final sobra 1</u>: n é ímpar.

<u>Se forem 7 de cada vez, o cesto fica vazio</u>: n é múltiplo de 7.

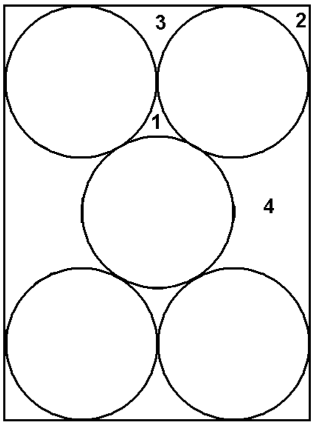
<u>Se forem 5 de cada vez, sobram 4</u>: o algarismo das unidades de n é 4 ou 9.
Como n é impar, o algarismo das unidades não pode ser 4.

Assim, n é um múltiplo de 7 e seu algarismo das unidades é 9. Logo, n pode ser 49, 119, 189 ou 259.

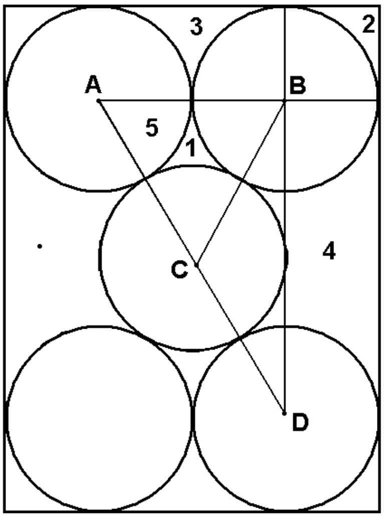
<u>Se forem 3 de cada vez, sobram 2</u>: o resto da divisão de n por 3 é 2.

Assim, n só pode ser 119.

Questão 3: Na figura abaixo têm-se círculos de raio 5 cm, que são tangentes entre si e também tangentes ao retângulo externo. Determinar as áreas das regiões 1, 2, 3 e 4 indicadas na figura.



Resolução:



Área 1 = (área do triângulo eqüilátero ABC, de lado 10 cm) - 3(área 5).
Área do triângulo ABC: 10x5raiz(3)/2 = 25raiz(3)
Área 5: $(\pi/3)5^2/2 = 25\pi/6$
Área 1: 25raiz(3) – $3(25\pi/6)$ = 25raiz(3) - $25\pi/2$

Área 2 = (área do quadrado de lado 5) – ¼(área do círculo de raio 5)
Área 2 = $5^2 - \pi 5^2/4 = 25 - 25\pi/4$

Área 3 = 2(Área 2) = $50 - 50\pi/4$

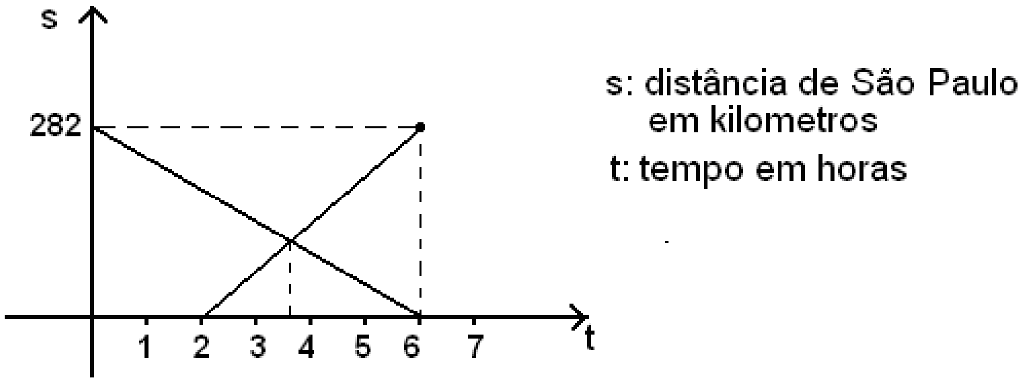
2(área 4) = (área do retângulo) - (soma das áreas dos círculos) – 2(área 1) – 4(área 2) – 2(área 3).
Altura do retângulo: 2x5+BD
No triângulo retângulo ABD, $AD^2 = AB^2+BD^2$. Logo, $BD^2=20^2 – 10^2$, ou seja, BD = 10raiz(3). Assim, a altura do retângulo é 10raiz(3)+10
Área do retângulo = 20x(10raiz(3)+10) = 200raiz(3)+200. Logo,
2(área 4) = 200raiz(3) +200 - $5\pi 5^2$ – 2(25raiz(3)-$25\pi/2$) – 4(25-$25\pi/4$) – 2(50 - $50\pi/4$) = 150raiz(3).-50π
Área 4 = 75raiz(3) - 25π.

Questão 4: Um ônibus meio velhinho parte ao meio-dia de Bauru para São Paulo, viajando com velocidade constante de 47 km/h, chegando à cidade de São Paulo às 6 horas da tarde. Uma automóvel parte de São Paulo às duas horas da tarde deste mesmo dia e, viajando com velocidade constante pela mesma estrada, chega à cidade de Bauru também às 6 horas da tarde.

a) Fazer o gráfico do deslocamento dos veículos, considerando-se a distância em função do tempo de Bauru a São Paulo.

b) Determinar a que horas (e minutos) o ônibus e o automóvel se cruzaram na estrada.

Resolução: Vamos colocar os dados no gráfico cartesiano onde, na horizontal vamos colocar o tempo gasto, em horas, a partir do meio dia e, na vertical, a distância dos veículos de São Paulo. Como a velocidade é constante, os gráficos dos deslocamentos do carro e do ônibus são representados por retas. O ponto de interseção das duas retas fornece o tempo decorrido no momento que os veículos se encontram na estrada.



Assim, temos duas retas.

A primeira passa pelos pontos de coordenadas (0, 282) e (6, 0). Logo, seu coeficiente angular é dado por 282 – 0 = m(0-6). Logo, m = -47 e sua equação é s – 0 = -47(t-6), ou seja, s = -47t + 282.

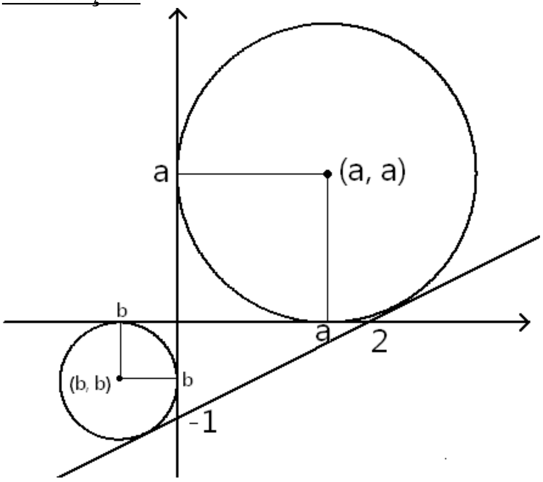
A segunda passa pelos pontos de coordenadas (2, 0) e (6, 282). Seu coeficiente angular é dado por 282 – 0 = m'(6 – 2), ou seja, m' = 282/4 = 141/2. Assim, sua equação é s – 0 = 141/2 (t – 2), ou seja, s = 141/2 t – 141.

Igualando o s das duas equações, encontramos o valor de t na interseção:

-47t+282 = 141/2 t – 141 $\Rightarrow$ t = 3,6 horas, ou seja, 3 horas e 6/10 horas = 3 horas e 36 minutos. Como consideramos o tempo sendo zero ao meio dia, os veículos se encontrarão às 15 horas e 36 minutos.

Questão 5: Encontrar a circunferência de maior raio que é tangente aos eixos cartesianos e também tangente à reta de equação $2y - x + 2 = 0$.

Resolução:



Como a circunferência é tangente aos eixos cartesianos então sua equação é da forma $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$.
Como a circunferência é tangente à reta $2y - x + 2 = 0$ então a reta e a circunferência têm um único ponto de interseção, que é solução do sistema formado pelas equações da reta e da circunferência:

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

$2y - x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2y + 2$

Substituindo então x por 2y + 2 na equação da circunferência obtemos:

$(2y + 2 - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$.

Desenvolvendo a equação acima obtemos:

$5y^2 + (8\text{-}6a)y+(a - 2)^2 = 0$.

Como a circunferência e a reta são tangentes, precisamos que a equação tenha uma única solução, ou seja, $\Delta = 0$.

Assim, $(8\text{-}6a)^2\text{-}4.5.(a\text{-}2)^2 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$, portanto,

$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como procuramos a circunferência de maior raio, ficamos com $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Assim, a circunferência procurada tem equação $(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + (y - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = (\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2$