15ª ORMUB/2007
OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

NOME: ____________________________________

ESCOLA: __________________________________

CIDADE: __________________________________

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões. A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	**Nota**
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
Total	

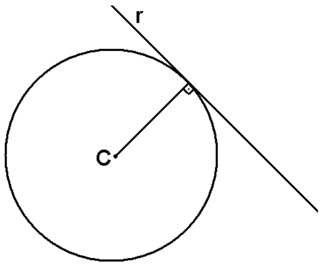
PROVA PARA OS ALUNOS DO 3º. ANO DO ENSINO MÉDIO

1ª. Questão – Achar a equação da circunferência com centro no ponto (¼, ¾) e que seja tangente à reta de equação x+2y=2.

Resolução: A reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Assim, a medida do raio da circunferência é igual à distância do centro à reta.

Sendo C=(¼, ¾) o centro e x+2y-2=0 a equação da reta tangente r, a distância de C a r é dada por $d(C,r) = \dfrac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$

$$\frac{|1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-\frac{1}{4}|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20} \Rightarrow \text{raio } R = \frac{\sqrt{5}}{20} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{80}$$

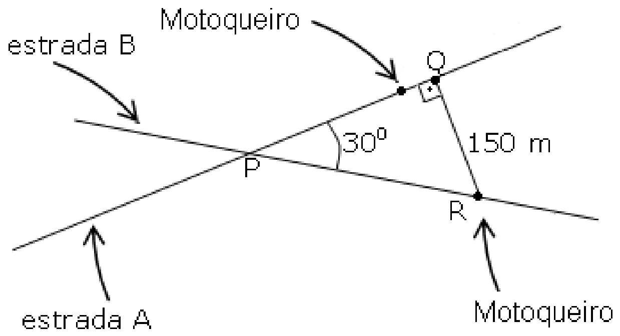


Como a equação da circunferência é dada por: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2$

Então: $(x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{3}{4})^2 = \dfrac{1}{80}$

2ª. Questão – Duas estradas **A** e **B** cruzam-se, formando um ângulo de 30º. Um motoqueiro que trafega pela estrada **A** encontra-se a 200 m do cruzamento, quando outro motoqueiro, que trafega pela estrada **B**, encontra-se a 150 m da estrada **A**. Qual é o motoqueiro que está mais próximo do cruzamento das estradas?

Resolução: A situação descrita no enunciado é ilustrada na Figura abaixo:



No triângulo PQR, tem-se que PR é a distância do motoqueiro que trafega na estrada B ao cruzamento. Além disso,

QR = 150 m; $R\hat{P}Q = 30^o$; $P\hat{Q}R = 90^o$.

Desse triângulo, obtém-se: $sen 30^o = \frac{150}{PR} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{150}{PR} \Rightarrow PR = 300\ m$.

Assim, o motoqueiro que trafega pela estrada **A** está mais próximo do cruzamento.

3ª. Questão - Determine a parte imaginária do número complexo $z = (1-i)^{200}$.

<u>Resolução</u>: Podemos escrever o complexo z como: $z = \left[(1-i)^2\right]^{100}$.

Desenvolvendo o produto notável:

$(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Substituindo na expressão dada, temos:

$z = (-2i)^{100} = (-2)^{100} \cdot i^{100} = 2^{100} \cdot (-1)^{100} = 2^{100}$.

Logo número complexo z é igual a 2^{100} e, portanto um número real. Daí, concluímos que a sua parte imaginária é zero.

4ª. Questão – Sejam:

- **g,** um polinômio do 1º grau, cujo gráfico contém os pontos $P(0, 2)$ e $Q(-1, 1)$;
- **f,** um polinômio do 2º grau, cujo gráfico tem eixo de simetria coincidente com a reta x = -1 e contém os pontos $R(1, 3)$ e $S(0, 0)$.

Suponha que um inseto **A** desloca-se segundo o gráfico de **g** e um inseto **B** desloca-se segundo o gráfico de **f**. Determine, se existir, um ponto do 1º quadrante que seja comum às trajetórias dos dois insetos.

__Resolução__: Primeiramente, determinam-se as expressões dos polinômios **g** e **f**. Tem-se:

- **g** é do tipo $g(x) = a \cdot x + b$, sendo $a \neq 0$. Uma vez que os pontos **P** e **Q** pertencem ao gráfico de **g**, vem:

$$\begin{cases} g(0) = 2 \\ g(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = 2 \\ a \cdot (-1) + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \therefore g(x) = x + 2$$

- **f** é do tipo $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, sendo $a \neq 0$. Uma vez que os pontos **R** e **S** pertencem ao gráfico de **f**, vem:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

Além disso, a abscissa do vértice da parábola é $x_V = -1$, pois o eixo de simetria coincide com a reta x = -1. Então:

$$x_V = -\frac{b}{2 \cdot a} = -1 \Rightarrow b = 2 \cdot a$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ b = 2 \cdot a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Logo, tem-se: $f(x) = x^2 + 2 \cdot x$.

Verifica-se, agora, se há pontos de interseção entre os gráficos de **f** e **g**:

$$g(x) = f(x) \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x = x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

Despreza-se o valor x = -2, já que se procura um ponto do 1º quadrante. Então:

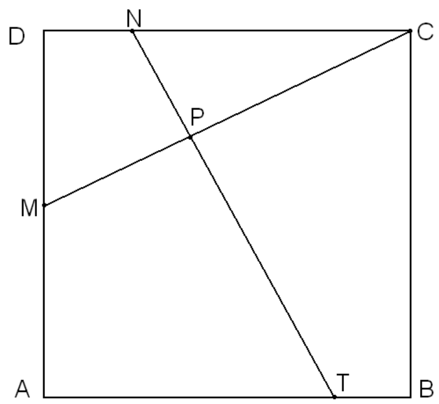
$$x = 1 \Rightarrow g(1) = f(1) = 3 \;\therefore\; M(1, 3).$$

5ª. Questão - A figura abaixo representa uma área de preservação ambiental em forma de um quadrado com lado medindo 40 km e cortada por duas estradas que iniciam e terminam nas estradas que delimitam a área. Se um guarda está no cruzamento das duas estradas que cruzam o parque, determine:

a) a menor distância que o guarda deve percorrer, andando pelas estradas que aparecem na figura, até a saída do vértice A;

b) quantas árvores serão necessárias para reflorestar a área AMPT, que foi totalmente devastada por um incêndio, sabendo-se que deve ser plantada uma árvore para cada quatro metros quadrados de terreno.

Considere as distâncias: DN = 10 km; AT = 30 km; DM = 16 km



Resolução: Considerando a figura num plano coordenado com centro no ponto A e eixos das abscissas e ordenadas passando por B e D, respectivamente, temos as coordenadas dos pontos:
A = (0, 0); D = (0, 40); C = (40, 40); T = (30, 0); B = (40, 0); N = (10, 40) e M = (0, 24) pois a distância de D a M é 16 Km e a distância de A a D é 40.
O ponto P é a interseção da reta por M e C e da reta por N e T.
Equação da reta por M e C : 2x-5y+120=0.
Equação da reta por N e T: 2x+y-60=0.
Interseção das duas retas: P = (15, 30).

a) Menor distância percorrida pelo guarda: caminhar de P a M e de M a A.
Distância de M a A é 24 – já calculada para as coordenadas de M.
Distância de P a M: $\sqrt{(15-0)^2+(30-24)^2} = \sqrt{261} \cong 16{,}16$ que é, aproximadamente, 16 Km. Logo, a menor distância percorrida é aproximadamente, 24 + 16 = 40 Km.

b) A área de AMPT pode ser tomada como a soma das áreas dos triângulos MAT e MPT. Área de MAT = 360 Km^2, Área de MPT = 270 Km^2. Área de AMPT= 630 km^2 = 630.000.000 m^2. Assim, serão necessárias 630.000.000/4 = 157.500.000 árvores.