

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3^º ANO DO ENSINO MÉDIO

14^a ORMUB/2006
OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3^º ANO DO
ENSINO MÉDIO

NOME: _____

ESCOLA: _____

CIDADE: _____

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões). A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	Nota
1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
5 ^a	
Total	

1ª. Questão – Seja

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & 0 & b \\ 0 & 2-x & c \\ b & 0 & d-x \end{pmatrix} \text{ onde } a, b, c \text{ e } d \text{ são números reais.}$$

a) - Mostre que $x = 2$ é uma raiz do polinômio $p(x)$.

b) - Mostre que as outras duas raízes de $p(x)$ também são reais.

Resolução.

a) $p(x) = (a-x)(2-x)(d-x) - b^2(2-x)$ ou seja

$$p(x) = (2-x) \left[(a-x)(d-x) - b^2 \right].$$

Assim $p(2) = (2-2) \left[(a-2)(d-2) - b^2 \right] = 0$, o que significa que 2 é raiz do polinômio $p(x)$.

b) Para que as outras duas raízes sejam reais é preciso mostrar que $\Delta \geq 0$.

Assim usando a Fórmula de Baskara temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+d)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ad - b^2) = \\ &= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 = \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2 = \\ &= (a-d)^2 + (2b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

pois é uma soma de quadrados.

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3^o ANO DO ENSINO MÉDIO

2ª. Questão - Determine o número natural n tal que:

$$(2i)^n + (1+i)^{2n} + 16i = 0, \text{ onde } i = \sqrt{-1} \text{ é a unidade imaginária.}$$

Resolução.

Inicialmente, veja que:

$$(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

$$\text{Observe também que } (1 + i)^{2n} = [(1 + i)^2]^n = (2i)^n$$

Substituindo, vem:

$$(2i)^n + (2i)^n + 16i = 0$$

Simplificando, fica:

$$2 \cdot (2i)^n + 16i = 0$$

Ou, também:

$$2 \cdot (2i)^n = -16i$$

Daí, vem imediatamente que:

$$(2i)^n = -8i$$

Podemos escrever:

$$2^n \cdot i^n = 2^3 \cdot (-i)$$

Então, teremos inevitavelmente:

$$2^n = 2^3 \text{ e } i^n = -i$$

Portanto, $n = 3$, uma vez que também

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$$

A resposta é, então, $n = 3$.

Resp: 3

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3^o. ANO DO ENSINO MÉDIO

3^a. Questão - Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $x^2 + y^2 = 25$, no ponto de coordenadas (3,4) e represente graficamente.

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3^o ANO DO ENSINO MÉDIO

4^a. Questão – Considere o polinômio $p(x) = x \cdot (x^2 - 1)$. Determine o sinal de $p(-1+a) \cdot p(0,3)$, para algum $a < 0$. Em seguida, verifique se existe alguma raiz real da equação $p(x) = 0$ no intervalo $[-1+a; 0,3]$.

PROVA PARA OS ALUNOS DO 3^o ANO DO ENSINO MÉDIO

5^a. Questão - Sejam as retas r_1 e r_2 de equações $y = \frac{1}{2}x + 3$ e $y = -2x + 8$,

as quais interceptam o eixo Ox nos pontos A e B, respectivamente. Seja o $\overline{AB}$ o eixo maior da elipse, cuja distância focal é igual a 4. Determine sua equação reduzida.