PROVA PARA OS ALUNOS DE 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

1) Considere o seguinte problema:

"Vitor ganhou R$ 3,20 de seu pai em moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos. Se recebeu um total de 50 moedas, quantas moedas de 5 centavos ele recebeu?"

O problema proposto possui alguma solução? Se sim, quantas e quais são elas?

Resolução:

Sejam:

- ✓ x = número de moedas de 5 centavos
- ✓ y = número de moedas de 10 centavos
- ✓ z = número de moedas de 25 centavos.

Como Vitor ganhou R$ 3,20 em moedas de 5, 10 e 25 centavos, a equação que representa matematicamente este fato é dada por

$$0{,}05\,x + 0{,}10\,y + 0{,}25\,z = 3{,}20.$$

E a equação que representa o fato dele ter recebido 50 moedas é expressa por

$$x + y + z = 50.$$

Logo, as variáveis x, y e z devem satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} 0{,}05\,x + 0{,}10\,y + 0{,}25\,z = 3{,}20 \\ x + y + z = 50. \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$x = 36 + 3\,z$$
$$y = 14 - 4\,z$$

onde z é a variável livre.

Observemos que como x, y e z representam quantidades de moedas, estes valores devem ser maiores que zero. Logo,

$$36 + 3\,z > 0$$
$$14 - 4\,z > 0$$
$$z > 0$$

o que implica que $0 < z < 3{,}5$. E, portanto, z pode ser 1, 2 ou 3. Ou seja, o problema possui três soluções e Vitor pode ter recebido de seu pai:

a) 1 moeda de 0,25 centavos, 39 moedas de 0,05 centavos e 10 moedas de 0,10 centavos.

b) 2 moeda de 0,25 centavos, 42 moedas de 0,05 centavos e 6 moedas de 0,10 centavos.
c) 3 moeda de 0,25 centavos, 45 moedas de 0,05 centavos e 2 moedas de 0,10 centavos.

2) **Determine a abscissa do ponto de intersecção das retas r e s, sabendo que a reta r passa pelo ponto P(1,–7) e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e a reta s é paralela à reta 2x – y +3=0 e passa pelo ponto Q(5, –17).**

Resolução:

Seja y=ax+b a equação de uma reta.

Como a reta r é paralela a bissetriz dos quadrantes ímpares, segue que o coeficiente angular da reta r é igual a 1. Isto é, a=1, na equação da reta. Para determinar o coeficiente b usamos o fato que o ponto P pertence à reta r. Obtemos que b = – 8. Portanto, a equação de r é dada por:

$$r: y = x - 8 .$$

Utilizando argumentos análogos concluímos que a equação da reta s é dada por:

$$s: y = 2x - 27.$$

Para determinarmos a intersecção das duas retas obtidas basta resolver o sistema linear nas variáveis x e y abaixo

$$\begin{cases} y = x - 8 \\ y = 2x - 27 \end{cases}$$

Obtemos que x = 19.

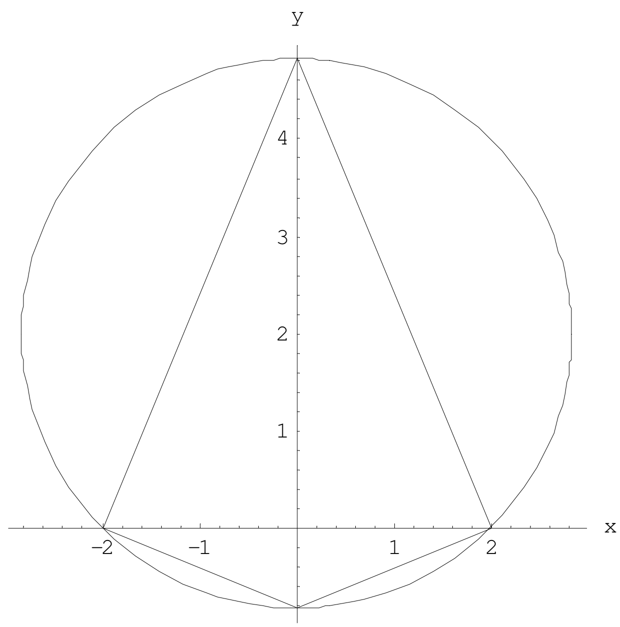
3) **Unindo os pontos de intersecção da circunferência, de centro (0,2) e raio $\sqrt{8}$, com os eixos coordenados, obteremos um quadrilátero. Calcule a área desse quadrilátero.**

Resolução:

A equação da circunferência de centro (0,2) e raio $\sqrt{8}$ é dada por

$$x^2 + (y - 2)^2 = 8.$$

Determinemos os pontos de intersecção desta circunferência com os eixos coordenados. Um ponto que está sobre o eixo x, possui a segunda coordenada igual a zero, isto é, y = 0. Substituindo esta equação na equação da circunferência obtemos que x = ± 2. Um ponto que está sobre o eixo y, possui a primeira coordenada igual a zero, ou seja, x = 0. Substituindo-a na equação da circunferência segue que y = $2 \pm 2\sqrt{2}$. Veja na Figura abaixo o gráfico correspondente a situação descrita acimam onde P(0, 2 + $2\sqrt{2}$), Q(-2,0), R(0, 2-2$\sqrt{2}$) e S(2,0).



Seja A a área do quadrilátero PQRS determinado pelos pontos de intersecção da circunferência com os eixos coordenados, isto é, os pontos P, Q, R e S. A área A é a soma das áreas dos triângulos PQS e QRS. Ou seja,

$$A = 4*(2+2\sqrt{2})/2 + 4*(-2+2\sqrt{2})/2 = 8\sqrt{2}$$

4) A medida do eixo maior de uma elipse de focos sobre o eixo Oy é igual à medida do diâmetro de uma circunferência e o centro desta elipse coincide com o centro desta circunferência cuja equação é dada por:

$$\mathbf{2x^2+2y^2-50=0,}$$

Sabemos também que a distância focal desta elipse é a metade da distância focal da hipérbole cuja equação é dada por:

$$\mathbf{5x^2 - 4y^2 = 80.}$$

Determine a equação reduzida desta elipse.

Resolução:

A equação da elipse procurada é da forma:

$$\frac{x^2}{b_e^2}+\frac{y^2}{a_e^2}=1 \qquad \text{(I)}$$

Determinando o diâmetro da circunferência:

$$2x^2 +2\,y^2 - 50 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2= 50 \text{ (dividindo por 2 a equação)}$$
$$x^2 + y^2 = 25$$

daí a circunferência tem centro na origem, isto é, $C_c(0,0)$ e raio $r_c = 5$. Logo o diâmetro da circunferência $d_c = 10$.

A medida do eixo maior da elipse, $2a_e$, coincide com a medida do diâmetro da circunferência então: $2a_e = 10$, isto é, $a_e = 5$.

Determinando a distância focal da hipérbole:

$$5x^2 - 4y^2 = 80 \text{ (dividindo a equação por 80)}$$
$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$$

Esta é a equação de uma hipérbole de centro na origem, isto é, $C_h(0,0)$ e focos contidos em Ox. Logo: $a_h^2 = 16$ e $b_h^2 = 20$. Usando a relação notável da hipérbole, ou seja,

$$c_h^2 = a_h^2 + b_h^2 ,$$

e substituindo os valores de $a_h^2 = 16$ e $b_h^2 = 20$, obtemos $c_h^2 = 36$, o que implica que $c_h = 6$, onde c é a semi-distância focal da hipérbole. Logo a distância focal da hipérbole $2c_h = 12$.

Sabemos que a distância focal da elipse, $2c_e$ é a metade da distância focal da hipérbole, logo a distância focal da elipse, $2c_e = 6$, o que equivale a $c_e = 3$.
Usando a relação notável da elipse, isto é,

$$a_e^2 = b_e^2 + c_e^2,$$

e substituindo $c_e = 3$ e $a_e = 5$, obtemos: $b_e^2 = 16$, o que equivale a $b_e = 4$.

Substituindo $a_e = 5$ e $b_e = 4$ na equação da elipse procurada (I) obtemos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

5) Calcule os valores de m e n de modo que o resto da divisão de $p(x)=x^4+mx^3-x^2+nx+1$ por $h(x)=x^2+x+1$ seja igual a $r(x)=x+2$

Resolução:

Sabemos que :

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Logo:

$$p(x) = h(x)\, q(x) + r(x). \qquad \text{(II)}$$

Como o grau de p(x) é 4 e o grau de h(x) é 2, então o grau de q(x) é 2. Daí,

$$q(x) = ax^2 + bx + c,$$

e substituindo os polinômios na equação (II) temos:

$$x^4+mx^3-x^2+nx+1=(x^2+x+1)(ax^2+bx+c)+(x+2) \text{ (III)}$$

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade (III) temos que:

$$x^4+mx^3-x^2+nx+1 = ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c+1)x + (c+2)$$

Pela igualdade de polinômios obtemos:

a =1
a+b = m
a+b+c = -1
b+c+1 = n
c + 2 = 1

Resolvendo as equações temos que: m = 0 e n = -1.