PROVA PARA OS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

1ª Questão – Uma urna contém 9 cartões numerados de 1 a 9. Se três cartões são retirados da urna, de maneira aleatória e simultânea, qual é a probabilidade de que a soma dos três valores seja um número par? Justifique sua resposta.

Uma resolução: *Sejam* x, y *e* z *os números inscritos em três cartões retirados simultaneamente. Como não há números iguais em cartões diferentes,* $x \neq y$, $y \neq z$ *e* $z \neq x$. *Ao mesmo tempo,* $\{x, y, z\} \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Como os cartões são retirados simultaneamente, a ordem não é relevante, e o número total de possíveis resultados é igual ao número de combinações com 3 elementos a partir de um conjunto de 9 elementos, ou seja,

$$N = C_{9,3} = \frac{9!}{3!\,(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 .$$

Por outro lado, $x + y + z$ *é par se e somente se:*

(a) $\{x, y, z\}$ *contém três elementos pares, ou seja,* $\{x, y, z\} \subset \{2,4,6,8\}$,

ou

(b) $\{x, y, z\}$ *contém um elemento par e dois elementos ímpares.*

O número de resultados do tipo (a) é igual ao número de combinações com 3 elementos a partir do conjunto de 4 elementos pares, ou seja,

$$N_a = C_{4,3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4 .$$

O número de resultados do tipo (b) é igual ao produto do número de combinações com um elemento a partir do conjunto dos 4 elementos pares e o número de combinações com 2 elementos a partir do conjunto dos 5 elementos ímpares, ou seja,

$$N_b = C_{4,1}\ C_{5,2} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!}\ \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 40 .$$

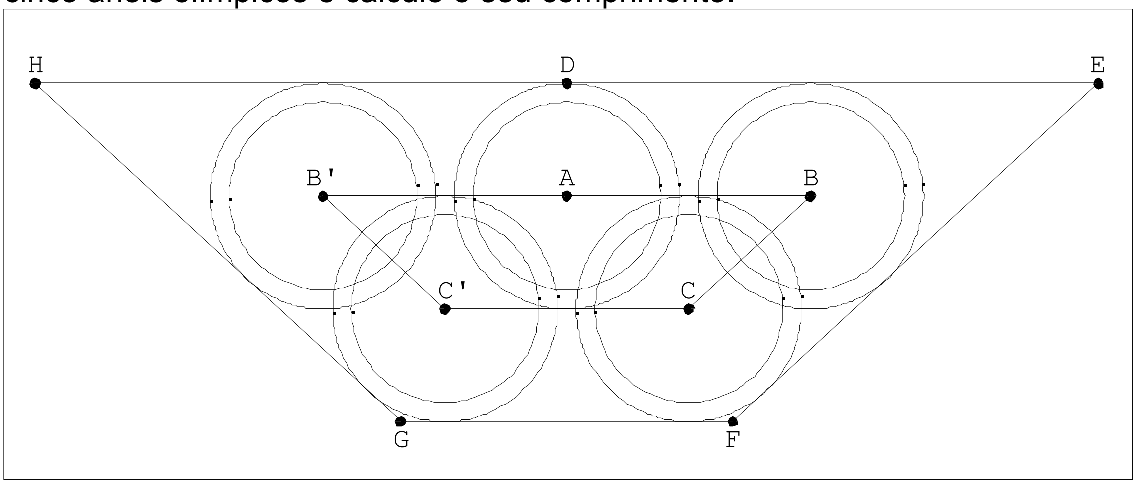
Finalmente, a probabilidade de que $x + y + z$ *seja par é*

$$\frac{N_a + N_b}{N} = \frac{4+40}{84} = \frac{44}{84} = \frac{11}{21} .$$

2ª Questão – Na construção da Bandeira Olímpica, a posição dos anéis está sujeita a várias regras. O raio dos anéis externos mede 6 dm, a espessura e a distância entre dois anéis que não se interceptam devem ser iguais a 1 dm. Na construção abaixo, os anéis têm os centros nos pontos A = (0, 0), B = (13, 0) e C = ($\frac{13}{2}$, -6) e, a partir destes pontos, faz-se uma reflexão relativa à reta determinada pelos pontos A e D = (0, 6) para a obtenção dos outros pontos. Ao se considerar os trapézios: EFGH, formado pelas retas tangentes externas aos anéis, e BCC'B' formado pelos centros dos anéis, pede-se para calcular:

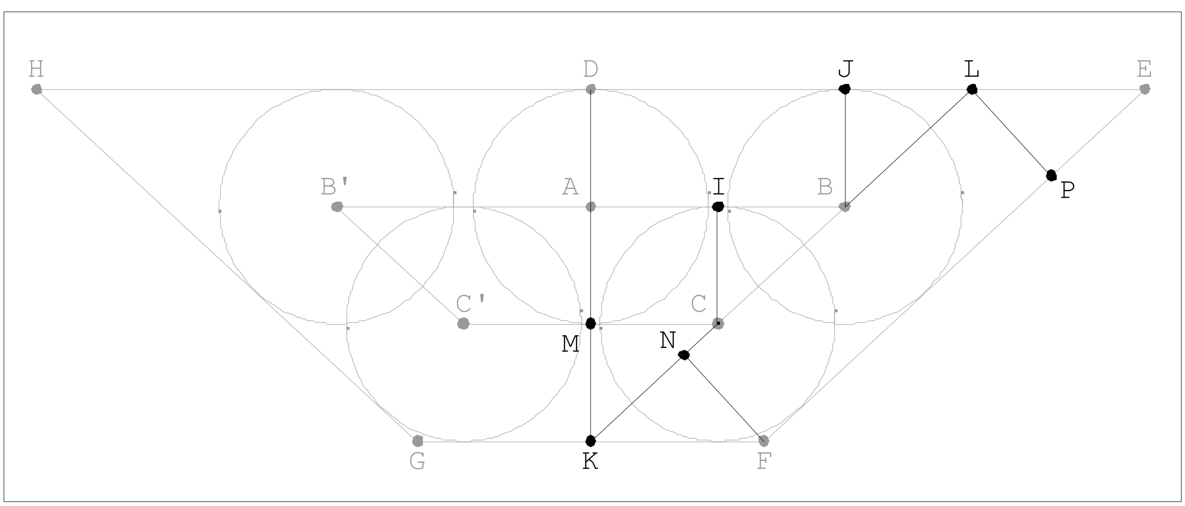
a) a relação entre as áreas dos trapézios EFGH e BCC'B'.

b) represente a curva de menor comprimento que envolve externamente os cinco anéis olímpicos e calcule o seu comprimento.



<u>Resolução</u>:Abaixo, uma resolução detalhada do problema.

a) A figura é simétrica em relação à reta que passa por A e D, consequentemente, basta considerar a metade da direita. Para auxiliar nos cálculos, estende-se o segmento DA e traça-se o segmento DK, onde $K(0,-12)$.



Usando as coordenadas dos pontos A, B, C e D, obtém-se:

i) $\overline{AB} = 13$ *,*

ii) o ponto médio do segmento CC' *é* $M(0,-6)$ *, portanto* $\overline{MC} = \frac{13}{2}$ *e* $\overline{MA} = 6$ *.*

Então, $área(BCC'B') = 2\ área(MCBA) = 2\ \frac{\overline{MC} + \overline{AB}}{2}\ \overline{MA} = \left(\frac{13}{2} + 13\right) \cdot 6 = 117$ *.*

De maneira análoga, $área(EFGH) = 2\ área(KFED)$*. Para determinar a área do trapézio KFED, realizam-se construções auxiliares:*

i) traça-se o segmento CK;
ii) estende-se o segmento CB, para formar o segmento CL, de maneira que L está no segmento DE;
iii) traça-se o segmento CI perpendicular ao segmento AB, com $I\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ *em AB;*
iv) traça-se o segmento BJ perpendicular ao segmento DE, com $J(13,6)$ *em DE;*
v) traça-se o segmento FN perpendicular ao segmento CK, com N em CK;
vi) traça-se o segmento LP perpendicular ao segmento EF, com P em EF.

Analisando a nova figura conclui-se que:

i) os triângulos CMK e BIC são congruentes, pois são triângulos retângulos, $\overline{MK} = \overline{IC} = 6$ *e* $\overline{CM} = \overline{BI} = \frac{13}{2}$ *.*

ii) os triângulos BIC, LJB, KNF e EPL são congruentes, pois são triângulos retângulos, os ângulos CBI, BLJ, FKN e LEP são congruentes e os segmentos IC, JB, NF e PL medem 6 unidades.

Portanto,

i) $\overline{KF} = \overline{LE} = \overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\frac{169}{4} + 36} = \frac{\sqrt{313}}{2}$ *;*

ii) $\overline{JL} = \overline{IB} = \frac{13}{2}$

iii) $\overline{ED} = \overline{DJ} + \overline{JL} + \overline{LE} = \overline{AB} + \overline{JL} + \overline{LE} = 13 + \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{313}}{2} = \frac{39 + \sqrt{313}}{2}$

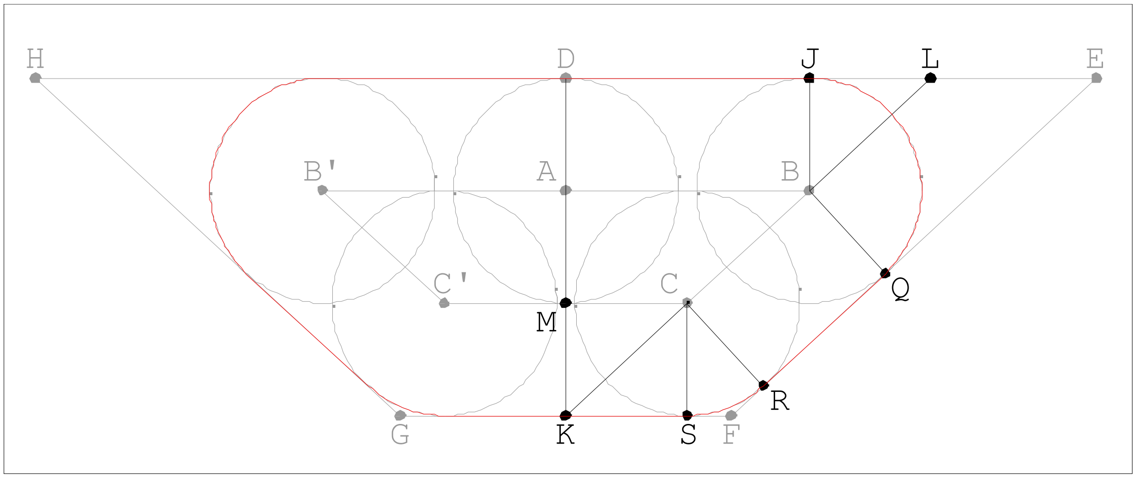
e conseqüentemente,

$$área(EFGH) = 2\ área(KFED) = 2 \cdot \frac{\overline{KF} + \overline{ED}}{2} \cdot \overline{KD} = \left(\frac{\sqrt{313}}{2} + \frac{39 + \sqrt{313}}{2}\right) \cdot 18 = \left(39 + 2\sqrt{313}\right) \cdot 9$$

.
Finalmente, a resposta ao item (a) é:

$$\frac{\acute{a}rea(EFGH)}{\acute{a}rea(BCC'B')} = \frac{9\cdot\left(39+2\sqrt{313}\right)}{117} = \frac{39+2\sqrt{313}}{13} = 3 + \frac{2\sqrt{313}}{13}.$$

b) Seja Γ a curva de menor comprimento que envolve os cinco anéis olímpicos. Essa curva está representada na figura auxiliar abaixo.



Para calcular o comprimento de Γ realizam-se construções adicionais:

i) traça-se o segmento CR perpendicular ao segmento EF, com R em EF;
ii) traça-se o segmento BQ perpendicular ao segmento EF, com Q em EF;
iii) traça-se o segmento BJ perpendicular ao segmento EH, com J em EH;

ii) traça-se o segmento CS perpendicular ao segmento KF, com $S\left(\frac{13}{2}, -12\right)$ em KF.

Note que $\angle SCR + \angle QBJ = \pi$
Então, pela simetria da figura, o comprimento de Γ é o dobro da soma dos comprimentos:

i) $\overline{KS} = \overline{MC} = \frac{13}{2}$;

ii) $\overline{SR} = 6\cdot\angle SCR$;

iii) $\overline{RQ} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{313}}{2}$;

iv) $\overline{QJ} = 6\cdot\angle QBJ$

v) $\overline{JD} = \overline{AB} = 13$.

Finalmente, a resposta ao item (b) é (em dm)

$$2\cdot\left(\overline{KS}+\overline{SR}+\overline{RQ}+QJ+\overline{JD}\right)=2\cdot\left(\frac{13}{2}+6\cdot\angle SCR+\frac{\sqrt{313}}{2}+6\cdot\angle QBJ+13\right)=$$

$$2\cdot\left(\frac{39}{2}+\frac{\sqrt{313}}{2}+6\cdot(\angle SCR+\angle QBJ)\right)=2\cdot\left(\frac{39}{2}+\frac{\sqrt{313}}{2}+6\cdot\pi\right)=39+\sqrt{313}+12\pi,$$

pois $\angle SCR+\angle QBJ=\pi$.

3ª Questão – A parábola é o conjunto dos pontos P do plano que são eqüidistantes de um ponto F (foco) e de uma reta d (diretriz). Seu vértice V é eqüidistante do foco e do pé da perpendicular à diretriz que passa por F (ver Figura 1).

Ao se manter a diretriz fixa e mover o foco, a parábola se move, juntamente com seu vértice. Quando o foco F descreve uma circunferência, verifica-se que o vértice V descreve uma elipse (ver Figura 2).

Encontre a equação da elipse quando o foco descreve a circunferência de raio 2, com centro na origem do sistema cartesiano, e a diretriz tem por equação y = -6.

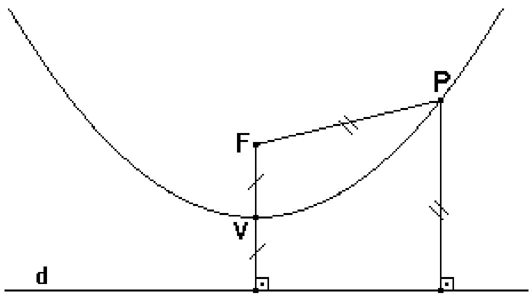


figura 1

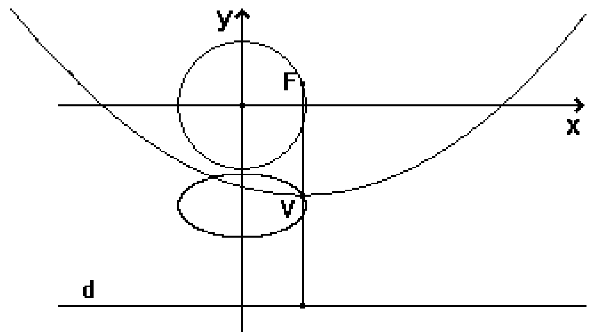


figura 2

<u>Resolução:</u> A equação da circunferência de raio 2 e centro na origem é $x^2 + y^2 = 4$. *Como o foco* $F(x_F, y_F)$ *está sobre a circunferência, suas coordenadas satisfazem:*

$$x_F^2 + y_F^2 = 4.$$

Como a diretriz é horizontal, o eixo da parábola é vertical. Então, as coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ *satisfazem:*

i) $x_V = x_F$

ii) $y_V = \dfrac{y_F - 6}{2}$.

Daí obtém-se que $x_F = x_V$ *e* $y_F = 2y_V + 6 = 2(y_V + 3)$, *e substituindo na equação da circunferência:*

$$x_V^2 + [2(y_V + 3)]^2 = 4.$$

Dividindo-se ambos os membros da igualdade por 4, obtém-se

$$\frac{x_V^2}{4} + (y_V + 3)^2 = 1\cdot$$

Assim, o vértice da parábola está sobre a elipse de equação

$$\frac{x^2}{4} + (y+3)^2 = 1\cdot$$

4ª Questão – Seja P(x) um polinômio de grau n, com n raízes distintas, e tal que o coeficiente do termo de maior grau é 1. Sabendo-se que: a menor raiz é 1; as raízes estão numa progressão geométrica de razão 4; o termo independente é 2^{132}, determine o grau de P(x).

<u>Resolução</u>: O polinômio $P(x)$ é de grau n e tem n raízes reais distintas $x_1, x_{2,} ..., x_n$. Considerando que $x_1 < x_2 < ... < x_n$, sabe-se que $x_1 = 1$ e $x_k = 4x_{k-1}$ para cada número inteiro k que satisfaça $2 \le k \le n$. Portanto, $x_k = 4^{k-1}$.

Por outro lado, o coeficiente do termo de maior grau é 1, conseqüentemente, é válida a expressão:

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n),$$

e o termo independente de x é

$$2^{132} = (-x_1) \cdot (-x_2) \cdot ... \cdot (-x_n) = (-1)^n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n \cdot 4^0 \cdot 4^1 \cdot 4^2 ... \cdot 4^{n-1} =$$
$$= (-1)^n \cdot 4^{0+1+2+...+(n-1)} = (-1)^n \cdot 2^{2(1+2+...(n-1))}$$

Mas, a soma dos termos da progressão aritmética 1,2, ..., (n-1) é

$$1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \quad ,$$

portanto:

$$2^{132} = (-1)^n \cdot 2^{n(n-1)}.$$

Isso implica que n é um número par e

$$n(n-1) = 132,$$

ou seja

$$n^2 - n - 132 = 0,$$

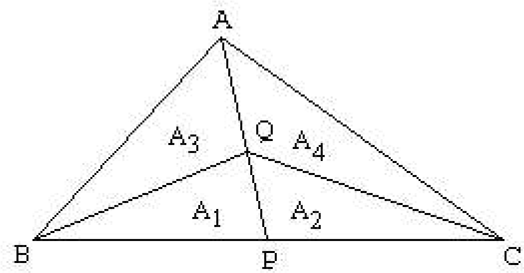
que, resolvendo chega-se em n=12 ou n=-11.

Como n tem que ser positivo e par, então o grau do polinômio é 12.

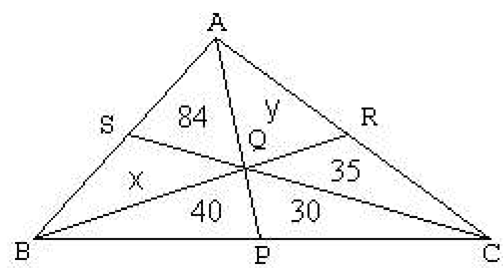
5ª Questão – No triângulo ABC, abaixo, P é um ponto sobre BC, Q um ponto sobre AP e A_n, n=1,2,3,4, é a área de cada triângulo parcial.

a) Prove que $\frac{PB}{PC} = \frac{A_1}{A_2}$

b) Prove que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 + A_3}{A_2 + A_4} = \frac{A_3}{A_4}$



c) Calcular a área do triângulo ABC abaixo, em que estão indicadas as áreas dos triângulos parciais.



<u>Resolução:</u> Denotando por H a altura do triângulo maior (ABC) em relação ao vértice A e por h a altura do triângulo menor (QBC) em relação ao vértice Q, temos:

a) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{PB \cdot h}{2}}{\frac{PC \cdot h}{2}} = \frac{PB}{PC}.$$

b) $$\frac{A_1 + A_3}{A_2 + A_4} = \frac{\frac{PB \cdot H}{2}}{\frac{PC \cdot H}{2}} = \frac{PB}{PC}.$$ *Logo, de acordo com o item (a),* $$\frac{A_1 + A_3}{A_2 + A_4} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Também,

$$\frac{A_1 + A_3}{A_2 + A_4} = \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow (A_1 + A_3)\,A_2 = (A_2 + A_4)\,A_1 \Leftrightarrow A_1A_2 + A_3A_2 = A_2A_1 + A_4A_1 \Leftrightarrow \frac{A_3}{A_4} = \frac{A_1}{A_2}.$$

c) Aplicando o resultado $\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_1}{A_2}$ *ao triângulo ABC da segunda figura temos:*

i) $$\frac{x + 84}{y + 35} = \frac{40}{30}$$

Analogamente, considerando como base o AC, que é dividido pelo ponto R, temos:

ii) $\dfrac{x+84}{40+30} = \dfrac{y}{35} \quad \Leftrightarrow \quad x+84 = 2y$

Substituindo (ii) em (i) temos

$$\frac{2y}{y+35} = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 6y = 4y+140 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 140 \quad \Leftrightarrow \quad y = 70\,.$$

Assim, $x+84 = 2(70) \;\Leftrightarrow\; x = 140-84 \;\Leftrightarrow\; x = 56\,.$

Finalmente, a área do triângulo ABC é:

$$84+40+30+35+(x+y) = 189+(56+70) = 315.$$