PROVA DA 2ª SÉRIE - ORMUB - 2010

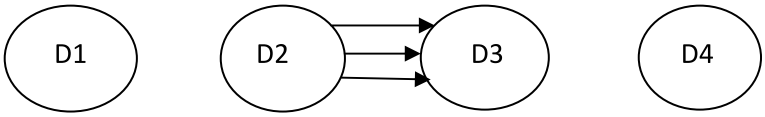
1ª Questão: Um caminhão de uma grande loja de departamentos deve fazer entregas saindo do depósito D1, para outros 3 depósitos, D2, D3 e D4. Ele obrigatoriamente tem que passar por D2 e D3 (nesta ordem) para chegar em D4. Sabendo que existem 3 caminhos diferentes ligando D2 a D3 pede-se:

a) Determine todas as possibilidades de quantos caminhos podem existir ligando D1 a D2 e D3 a D4 para que o total de caminhos existentes entre D1 e D4 seja 18;

b) Faça um esquema para cada possibilidade determinada no item (a).

Solução:

a)



Suponha que:

x é o número de caminhos ligando D1 a D2

y é o número de caminhos ligando D3 a D4

Sabendo que o total de caminhos ligando D1 a D4 é 18, temos:

$X \,.\, 3 \,.\, y = 18 \Rightarrow x.\, y = \frac{18}{3} \Rightarrow x.\, y = 6$

Logo temos as seguintes possibilidades para x e y:

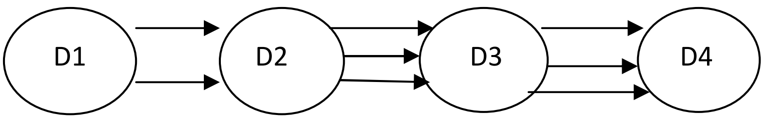
Possibilidade 1: x=2 e y=3

Possibilidade 2: x=3 e y=2

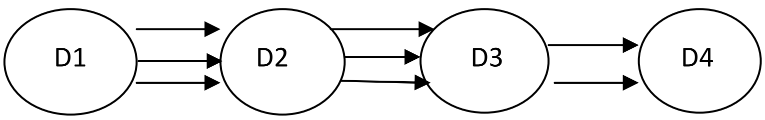
Possibilidade 3: x=6 e y=1

Possibilidade 4: x=1 e y=6

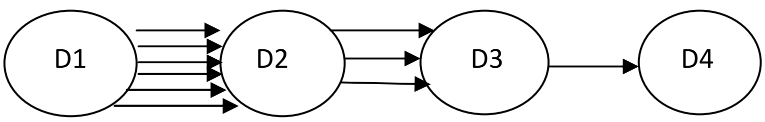
b) Possibilidade 1:



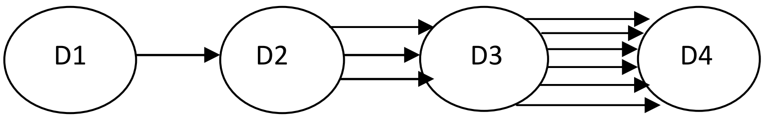
Possibilidade 2



Possibilidade 3



Possibilidade 4



2ª Questão: Um paciente recebe via intravenosa um medicamento à taxa constante de 1,5 mL/min. O frasco do medicamento é formado por uma parte cilíndrica, de raio 4 cm e altura 9 cm, seguida por uma parte cônica de mesmo raio e altura 3 cm. Este frasco estava cheio quando se iniciou a medicação e, após 4 h de administração contínua, a medicação foi interrompida. Dado que 1 cm^3 = 1 mL, e usando a aproximação π=3 calcule o volume, em mL, do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação.

Solução: Dado que a taxa em que o medicamento é recebido é de 1,5 mL/min, após 4h=240 min o paciente terá recebido 1,5 x 240 = 360 L do medicamento. Agora, quando se iniciou a medicação o frasco estava cheio, então o volume de medicamento era de

$V = \pi .\ 4^2.\ 9 + 1/3.\ \Pi .4^2.3,$

ou seja, devemos somar o volume da parte cilíndrica com o volume da parte cônica. Logo,

$V = 144\ \pi + 16\ \pi = 160\ \pi = 480$ mL

Portanto, o volume do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação é de

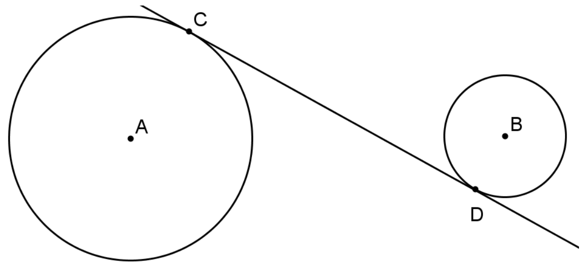
480 mL – 360 mL = 120 mL

3ª Questão: Considere A uma matriz real e quadrada de ordem 3. Considere também as seguintes matrizes: B_1, que se obtém de A somando à linha 2 desta matriz uma constante k; B_2, que se obtém de A subtraindo à linha 2 desta matriz a mesma constante k. Mostre que: $\det(A) = \frac{1}{2}\left[\det(B_1) + \det(B_2)\right]$.

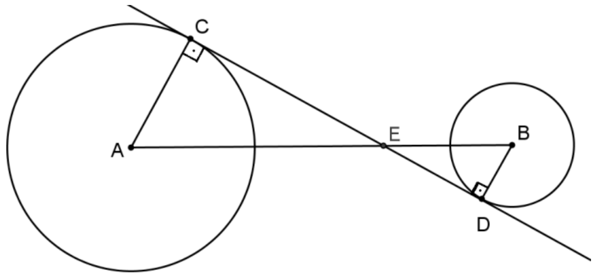
Solução: Seja $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Então: $B_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+k & e+k & f+k \\ g & h & i \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-k & e-k & f-k \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Por propriedades dos determinantes temos que: $\det(B_1) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+k & e+k & f+k \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & k & k \\ g & h & i \end{vmatrix}$ e $\det(B_2) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-k & e-k & f-k \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -k & -k & -k \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & k & k \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Logo $\det(B_1) + \det(B_2) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & k & k \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ k & k & k \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot \det(A)$. Portanto:

$$\det(A) = \frac{1}{2}[\det(B_1) + \det(B_2)]$$

4ª Questão: Na figura a reta é tangente às circunferências nos pontos C e D, a distância de A a B é de 10 cm, a distância de C a D é de 8 cm, e o raio da circunferência maior é o triplo do raio da menor. Encontrar as medidas dos raios.



Solução. Temos na figura abaixo, dois triângulos retângulos semelhantes, pois têm dois pares de ângulos congruentes: os ângulos retos e os ângulos opostos pelo vértice – AEC e BED.



Logo, EC/ED = EA/EB=AC/BD = 3BD/BD =3, pois o raio da circunferência maior é o triplo do raio da menor. Portanto, EC=3ED e AE=3BE (1).

Temos EC+ED=CD=8 (2).

De (1) e (2) temos 4ED=8, portanto, ED=2cm e EC = 6cm (3).

Temos AE+BE=AB=10 (4).

De (1) e (4), temos 4BE = 10, portanto, BE=5/2 e AE=15/2 (5)

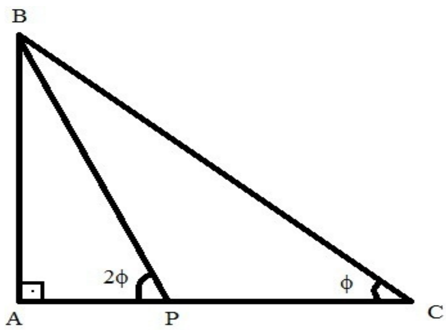
Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que $AE^2=AC^2+EC^2$ e $BE^2=BD^2+ED^2$.

Logo, $AC^2=AE^2-EC^2=(15/2)^2-6^2=225/4-36=81/4$, portanto, AC=9/2=4,5;

$BD^2=BE^2-ED^2=(5/2)^2-2^2=25/4-4=9/4$, portanto, BD=3/2.

Assim, os raios das circunferências medem 4,5cm e 1,5cm.

5ª Questão: Na figura abaixo determine o valor do segmento PC, sabendo que AB=3 e que BC=5.



Solução: Por Pitágoras temos que AC=4. Logo, $\cos\phi = 4/5$ e temos que $\text{sen}\phi = 3/5$.

Desta forma: $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \text{sen}^2\phi = \dfrac{7}{25}$ e $\text{sen}(2\phi) = 2\,\text{sen}\phi\cos\phi = \dfrac{24}{25}$

Temos que $\text{sen}(2\phi) = \dfrac{AB}{BP}$, logo $BP = \dfrac{AB}{\text{sen}(2\phi)} = \dfrac{25}{8}$. Além disso, $\cos(2\phi) = \dfrac{AP}{BP}$, logo $AP = BP \cdot \cos(2\phi) = \dfrac{7}{8}$. Por fim, $PC = AC - AP = 4 - \dfrac{7}{8} = \dfrac{25}{8}$. OBS: Note que o triângulo BCP é isósceles.