1) Considere a função $f(x) = senx$. Determine o conjunto domínio, o conjunto imagem, o período e esboce o gráfico da função $g(x) = 2 + f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução. Sabe-se que o domínio de *f* é o conjunto $\Re$ dos números reais e que seu período é 2π.

Tem-se: $g(x) = 2 + sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Como se somou a constante negativa $-\frac{\pi}{3}$ à variável *x* do domínio da função *f*, o gráfico de *f* sofre uma translação horizontal à direita. A soma da constante 2 a $f(x)$ leva a uma translação vertical do gráfico de *f*, no sentido positivo. O domínio e o período de *f* não se alteram. Assim, tem-se: $D(g) = \Re$ e $p = 2\pi$.

Quanto ao conjunto imagem, tem-se:

$$-1 \leq sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1;$$

então:

$$1 \leq 2 + sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 3,$$

ou seja, o conjunto imagem de *g* é: $Im(g) = [1,3]$.

O gráfico de *g* é mostrado na Figura 1:

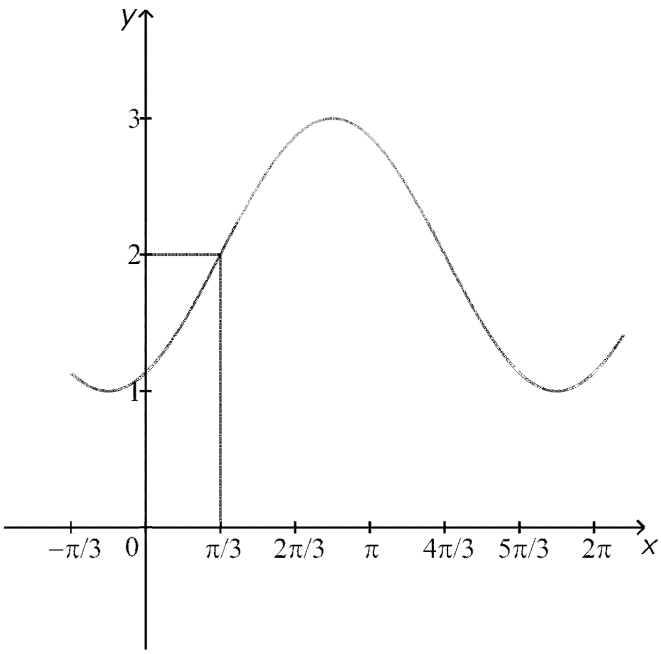
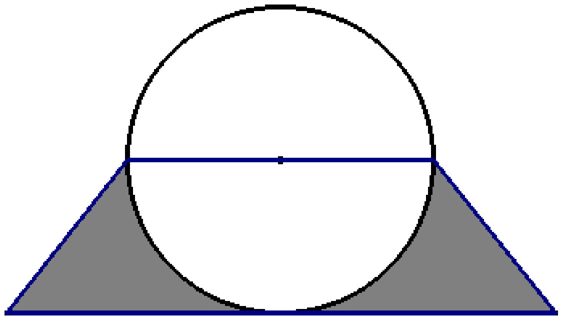


FIGURA 1

****
******

2) Na figura abaixo temos uma circunferência de raio 2cm com centro na base menor e tangente à base maior do trapézio. Considerando que a medida da base maior é igual à medida da menor somada com o raio da circunferência, determine a área da região escura.



Solução: A medida da base menor é igual ao diâmetro da circunferência, ou seja b=4cm.

A medida da base maior é igual à medida da menor somada com o raio da circunferência, ou seja, B = 4+2 = 6cm. A medida da altura do trapézio é igual ao raio, ou seja, h=2cm.

Assim, a área do trapézio é igual a A_1=h.(b+B)/2 = 2.(4+6)/2 = 10cm².

A área da circunferência é $A_2=\pi.2^2 = 4\pi$.

A área da região escura é igual à área do trapézio menos à metade da área da circunferência, isto é, $A_3 = (10 - 2\pi)$cm² ≅ 3,7cm².

****

3) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 e $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Se $\det(A\cdot B)=\det(A)+\det(B)$, determine o valor de $R=\dfrac{\det(2AB)}{\det(A)}$.

Solução: $\det(A\cdot B)=\det(A)+\det(B) \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B)=\det(A)+\det(B) \Rightarrow$ $\det(A)=\dfrac{\det(B)}{\det(B)-1}$. Como $\det(B)=3 \Rightarrow \det(A)=\dfrac{3}{2}$. Logo:

$$R=\frac{\det(2AB)}{\det(A)}=\frac{4\cdot\det(A)\cdot\det(B)}{\det(A)}=4\cdot 3=12$$

Resposta: R = 12
****

4) Uma laranja, em forma de esfera de raio R, é descascada e separada em 12 gomos idênticos. A esfera que resulta ao tirar a casca tem 90% do raio da esfera inicial. Um dos gomos é espremido numa colher em forma de hemisfério, cujo raio é metade do raio da laranja. Ao espremer o gomo na colher, ele rende 81% do seu volume em forma de suco. Determine se o suco do gomo cabe na colher.

<u>Resolução:</u> O raio da esfera que é decomposta em 12 gomos idênticos é $9R/10$, e gomo rende 81% do seu volume em forma de suco. Portanto, o volume de suco é

$$V_S = \frac{81}{100}\frac{1}{12}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{9R}{10}\right)^3.$$

Por outro lado, o volume da colher é

$$V_C = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3.$$

Portanto, temos

$$\frac{V_S}{V_C} = \frac{\frac{81}{100}\frac{1}{12}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{9R}{10}\right)^3}{\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3} = \frac{27}{200}\left(\frac{9}{5}\right)^3 = \frac{3^3\ 9^3}{200\ 5^3} = \frac{27^3}{25000} = \frac{27^3\ 4}{100\ 000} = \frac{78732}{100000} < 1.$$

Finalmente, como $V_S < V_C$, o suco do gomo cabe na colher e ocupa perto de 79% do volume.

****

5) Seja A o conjunto dos números naturais de 1 a 20. De quantas maneiras pode-se tomar 3 números distintos de A de forma que a soma destes seja ímpar?

<u>Resolução.</u> Considerando $A_i = \{1, 3, 5, ..., 19\}$ e $A_p = \{2, 4, 6, ..., 20\}$ os subconjuntos dos pares e dos ímpares de A, temos que ambos tem 10 elementos cada.

Para que a soma de três elementos de A seja ímpar de vê ocorrer:

- os três são ímpaes ou
- um é ímpar e dois são pares

Caso os três sejam ímpares temos $\frac{10!}{3!7!} = 120$ possibilidades

Caso um seja ímpar e os outros dois , pares, temos

$\frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{10!}{1!9!} = 45 \cdot 10 = 450$ possibilidades.

Assim, pode-se tomar de 450 + 120 = 570 maneiras.