Questão 1: Em uma festa de aniversário, deseja-se formar 10 casais para a valsa. A aniversariante convidou 10 garotos e 9 garotas.

a) Quantos casais diferentes poderão ser formados?

b) Sabendo-se que 4 das meninas são loiras e 6 dos rapazes são morenos, qual é a probabilidade de que um casal qualquer seja formado por uma loira e um moreno?

SOLUÇÃO:

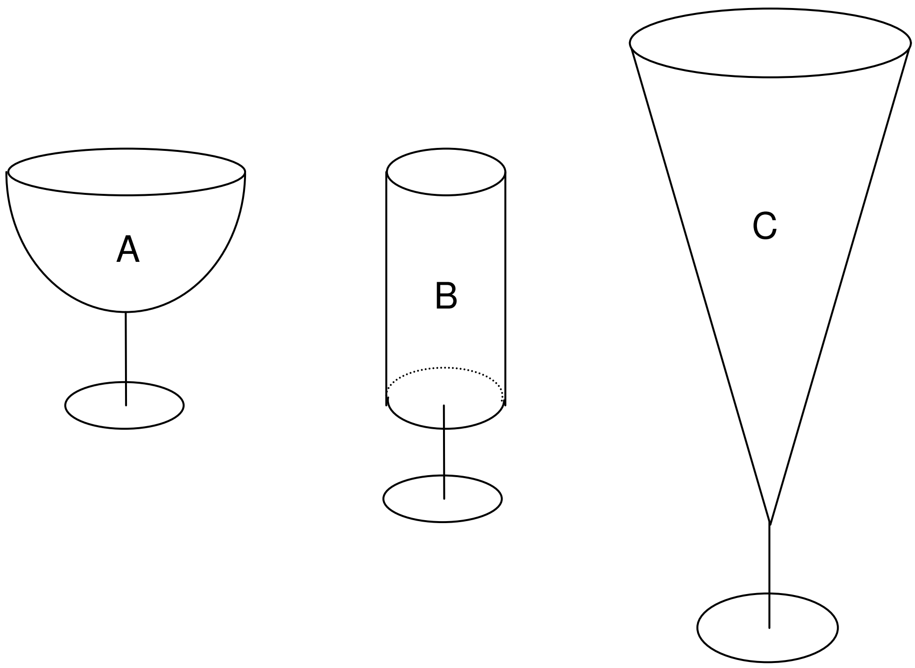
a) No total são 10 meninas e cada uma delas tem 10 opções de garotos para formar um par. Logo, o número total de casais possíveis é $10 \times 10 = 100$.

b) Cada uma das 4 loiras possui 6 garotos morenos para formar um par loira/moreno. Nestas condições, o número total de casais possíveis é $4 \times 6 = 24$.

   Logo, a probabilidade de que um casal seja formado por uma loira e um moreno é:

$$P = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

Questão 2: Um técnico de laboratório dispõe dos recipientes **A**, **B** e **C**. O recipiente **A** tem a forma de uma semi-esfera de raio 3 cm e está cheio com uma mistura de etanol e água, em que a porcentagem de etanol é 80%. O recipiente **B** tem forma de um cilindro de raio 2 cm e altura 8 cm e está cheio com outra mistura de etanol e água, em que a porcentagem de etanol é 40%. O recipiente **C** tem a forma de um cone e está ocupado somente com água até metade do seu volume. A água em **C** assume a forma de um cone de raio 3 cm e altura 16 cm. O técnico verte toda a mistura de **A** em **C** e completa **C** com parte da mistura contida em **B**. Determinar a porcentagem final de etanol em **C**.



Resolução: Os volumes dos recipientes cheios são:

$$V_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (3cm)^3 = 18\pi\, cm^3 ,$$

$$V_B = \pi \cdot (2cm)^2 \cdot (8cm) = 32\pi\, cm^3 ,$$

$$V_C = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot (3cm)^2 \cdot (16cm) = 96\pi\, cm^3 .$$

De acordo com o enunciado, metade do volume de C é preenchida pela mistura em A e parte da mistura em B. Vamos chamar de x o volume da mistura em B que é usada para completar C. Temos:

$$\frac{V_C}{2} = V_A + x,$$

portanto, $x = \frac{V_C}{2} - V_A = 30\pi\, cm^3$.

Por outro lado, o volume de etanol na mistura final em C é 80% do volume de A mais 40% do volume x. Chamando o volume final de y, temos:

$$y = \frac{80}{100} \cdot V_A + \frac{40}{100} \cdot x = \left(\frac{4}{5} \cdot 18 + \frac{2}{5} \cdot 30\right)\pi\, cm^3 = \frac{132}{5}\pi\, cm^3.$$

A fração de etanol na mistura final é

$$\frac{y}{V_C} = \frac{\frac{132\pi}{5}}{96\pi} = \frac{132\pi}{5}\frac{1}{96\pi} = 0,275.$$

Assim, a porcentagem de etanol na mistura final é 27,5%.

Questão 3: Sendo **x** um arco tal que cosx = tgx , calcular senx.

Solução:

Sabemos que tgx = senx / cosx.

Substituindo tgx por cosx, vem:

cosx = senx / cosx donde vem: $\cos^2 x$ = senx. Mas,

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$.

Substituindo, fica: $1 - \text{sen}^2 x = \text{sen}x$.

Daí, vem: $\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1 = 0$

Fazendo senx = y e substituindo: $y^2 + y - 1 = 0$.

Resolvendo esta equação do 2º grau, usando a fórmula de Bhaskara,

fica: $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como y = senx, somos tentados a dizer que existem dois valores para senx, dados pela igualdade acima. Lembre-se porém que o seno de um arco é um número que pode variar de -1 a +1. Portanto, somente um dos valores acima satisfaz o problema ou seja: $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ que é a resposta procurada .

Questão 4: Sabendo-se que $c = \log_b a \Leftrightarrow a = b^c$, encontrar, se possível, a solução do sistema:

$$\begin{cases} \log_2(x+y+z) = 0 \\ \log_y(x+z) = 1 \\ \log_3 5 + \log_3 x = \log_3(y-z) \end{cases}$$

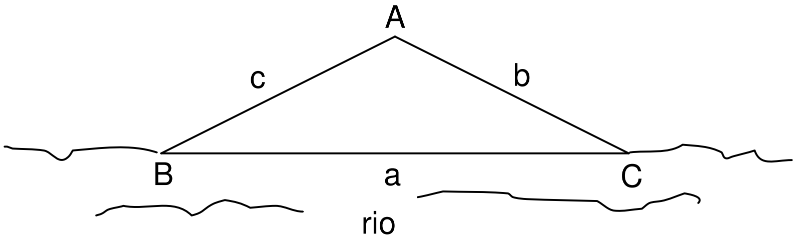
SOLUÇÃO:

Aplicando a definição e as propriedades dos logaritmos às equações do sistema anterior, chegamos ao seguinte Sistema Linear:

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+z = y \\ 5x = y-z \end{cases}$$

que é um Sistema Compatível e Determinado e cuja solução é $x = 0, y = 1/2$ e $z = 1/2$. Esta solução não satisfaz a terceira equação do sistema inicial, uma vez que o logaritmando *x* deve ser um número maior que zero. Logo, o sistema inicial é incompatível.

Questão 5: Um fazendeiro resolveu cercar uma área triangular, à margem do rio, para criar porcos, de acordo com a figura a seguir:



Sabe-se que : $c = \sqrt{2}$ m , $b = 2$ m e $\hat{C} = 30^o$. Pergunta-se: qual é o comprimento da cerca ***a*** no lado referente ao rio? Quais são as medidas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{A}$?

Resolução:

Aplicando a lei dos cossenos temos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + 2^2 - 2.a.2.\cos 30^o$$

$$2 = a^2 + 4 - 2.a.2.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a = 1 + \sqrt{3}$ m

ou

$a = -1 + \sqrt{3}$ m

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}\,;\quad \frac{2}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,30^o}\,;\ \text{sen}\ \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto $\hat{B} = 45^o$ ou $\hat{B} = 135^o$

Sendo $\hat{C} = 30^o$, então se $\begin{cases} \hat{B} = 45^o \text{ temos } \hat{A} = 105^o \\ \hat{B} = 135^o \text{ temos } \hat{A} = 15^o \end{cases}$

Porém, num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Quando a = 1 + $\sqrt{3}\,\text{m}$ temos a como o maior lado, portanto $\hat{A} = 105^o$ e $\hat{B} = 45^o$

Quando a = -1 + $\sqrt{3}\,\text{m}$ temos a como o menor lado, portanto $\hat{A} = 15^o$ e $\hat{B} = 135^o$.