

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2º. ANO DO ENSINO MÉDIO

15ª ORMUB/2007
OLIMPIÁDA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2º ANO DO
ENSINO MÉDIO

NOME: _____

ESCOLA: _____

CIDADE: _____

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões. A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	Nota
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
Total	

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

1ª. Questão - Considere o quadrado da Figura 1 e o paralelogramo da Figura 2.

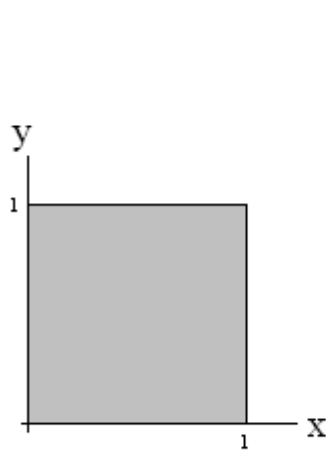


Figura 1

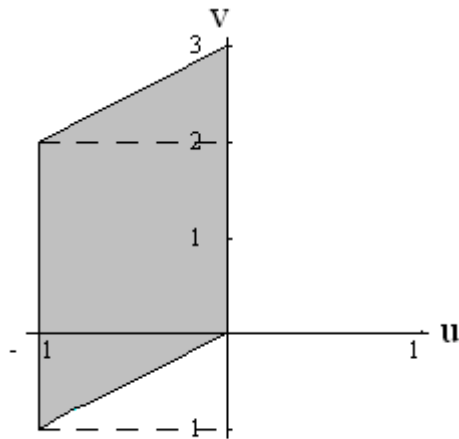


Figura 2

Se as coordenadas cartesianas (u, v) dos vértices do paralelogramo são obtidas das coordenadas cartesianas (x, y) dos vértices do quadrado pelo produto matricial

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

determine os valores de a, b, c e d .

Solução:

De (1) segue que a, b, c e d satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by = u & (2) \\ cx + dy = v & (3) \\ a + b = -1 & (4) \\ c + d = 2 & (5) \end{cases}$$

Da Equação (4) tem-se:

$$a = -(b+1) \quad (6)$$

e da Equação (5) que

$$c = 2 - d \quad (7).$$

Substituindo a e b em (2) e (3), obtém-se que:

$$\begin{cases} -(b+1)x + by = u \\ (2-d)x + dy = v \end{cases} \quad (8)$$

Como as coordenadas cartesianas (u, v) dos vértices do paralelogramo são obtidas das coordenadas cartesianas (x, y) dos vértices do quadrado, substituindo $(u, v) = (-1, -1)$ e $(x, y) = (1, 0)$ em (8), obtém-se que $b = 0$ e $d = 3$.

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

Observar que no caso em que $(u,v)=(0,3)$ e $(x,y)=(0,1)$ obtemos os mesmo valores para b e d . Portanto, de (6) e (7), segue que
 $a=-1$ e $c=-1$.

Resposta: $a=-1$, $b=0$, $c=-1$ e $d=3$. ■

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

2ª. Questão - Uma lata de tinta, na forma de um cilindro de raio R e altura $3R$, é utilizada para pintar a superfície de uma esfera de raio $10R$ e a superfície de um objeto maciço, em forma de um cone circular reto, cuja base tem raio $15R$ e cuja altura é $20R$. O pintor é muito cuidadoso e usa metade da lata para pintar com finas camadas de tinta de igual espessura, sem desperdícios. Calcule a espessura das camadas de tinta seca, sabendo que a perda de volume na secagem da tinta é de 50%.

Solução: O volume da tinta seca é 50% da metade do volume da lata, ou seja,

$$V_T = \frac{50}{100} \frac{1}{2} \pi R^2 (3R) = \frac{3\pi}{4} R^3.$$

Se a camada de tinta seca é bem fina, com espessura s , então o volume de tinta seca na esfera é o produto de s pela área da esfera, ou seja,

$$V_{TE} = s 4\pi (10R)^2 = 400\pi R^2 s.$$

Igualmente, a camada de tinta seca na superfície do objeto cônico será o produto de s pela área do cone, ou seja,

$$V_{TC} = s [\pi (15R)(15R + 25R)] = 600\pi R^2 s,$$

pois o comprimento da geratriz do cone é $25R$.

Finalmente, temos

$$V_T = V_{TE} + V_{TC},$$

ou seja,

$$\frac{3\pi}{4} R^3 = 400\pi R^2 s + 600\pi R^2 s.$$

Portanto, a resposta é

$$s = \frac{1}{1\,000} \frac{3}{4} R = \frac{3R}{4000} \approx 0.00075 R. \quad \blacksquare$$

3ª. Questão - Considere a função

$$f : D \rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{\sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\sqrt[3]{\cos x}}.$$

Determine o domínio D, considerando $D \subset [0, 2\pi]$.

Solução: É preciso determinar os valores de x para os quais se tenha:

$$\begin{cases} \sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 & \text{(I)} \\ x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3 \cdot \pi}{2} & \text{(II)} \end{cases}.$$

Para um arco θ tal que $0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi$, tem-se que $\sin \theta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$. Então, para que (I) seja verificada, deve-se ter $0 \leq 2 \cdot x - \frac{\pi}{3} \leq \pi$, ou seja, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2 \cdot \pi}{3}$.

A solução é facilmente determinada através dos diagramas da Figura 1.

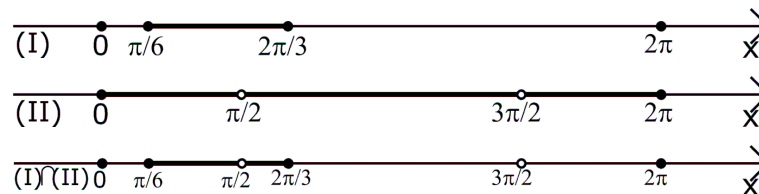


FIGURA 1

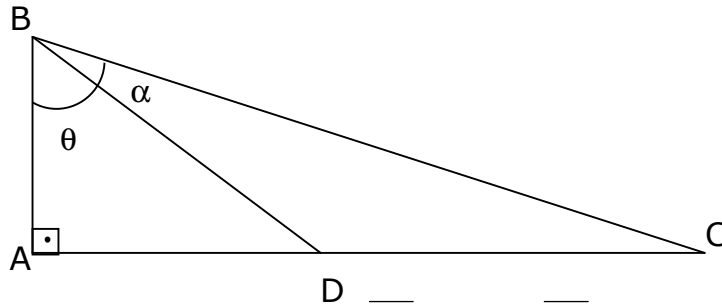
De acordo com esta Figura, o conjunto domínio da função dada é:

$$D = \left\{ x \in \mathbf{R} / \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \right\} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2 \cdot \pi}{3} \right] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2 \cdot \pi}{3} \right]. \blacksquare$$

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

4ª. Questão - Na figura abaixo, tem-se $\overline{BD} = 6$, $\overline{AC} = 10$ e $\sin \theta = \frac{2}{3}$.

Determine o valor de $\cos \alpha$.



Solução: No triângulo ABD $\Rightarrow \sin \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\overline{AD}}{6} \Rightarrow \overline{AD} = 4$

Então, por Pitágoras, temos:

$$(\overline{BD})^2 = (\overline{AD})^2 + (\overline{AB})^2 \Rightarrow (\overline{AB})^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

$$\text{Como } \overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} \Rightarrow \overline{DC} = 10 - 4 = 6$$

Aplicando Pitágoras no triângulo ABC, teremos:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 \Rightarrow (\overline{BC})^2 = 10^2 + 20 = 120 \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{30}$$

Aplicando a Lei dos co-senos no triângulo BDC, para o ângulo α , temos:

$$(\overline{DC})^2 = (\overline{BD})^2 + (\overline{BC})^2 - 2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \alpha$$

$$6^2 = 6^2 + 120 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{30} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-120}{-24\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$\Rightarrow$

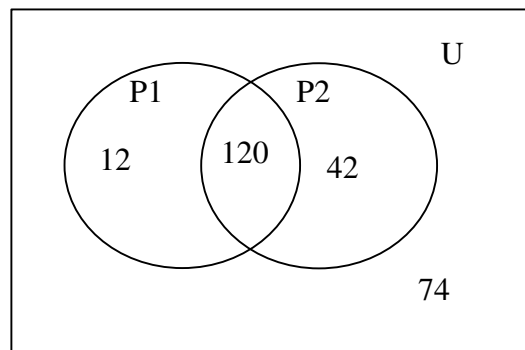
$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{30}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} = \frac{5 \cdot \sqrt{30}}{30} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}. \blacksquare$$

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

5ª. Questão – Em uma prova, caíram dois problemas. Sabe-se que 132 alunos acertaram o primeiro, 86 erraram o segundo, 120 acertaram os dois e 54 acertaram apenas um problema. Qual é a probabilidade de que um aluno escolhido ao acaso:

- a) não tenha acertado nenhum problema;
- b) tenha acertado apenas o segundo problema?

Solução: Se P1 é o conjunto dos que acertaram o primeiro problema e P2 é o conjunto dos que acertaram o segundo problema, temos a seguinte representação na forma de Diagrama de Venn:



a) $P(\text{n\~ao acertar nenhum problema}) = \frac{74}{248} = \frac{37}{124}$;

b) $P(\text{acertar apenas o segundo problema}) = \frac{42}{248} = \frac{21}{124}$. ■