

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

14ª ORMUB/2006
OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2º ANO DO
ENSINO MÉDIO

NOME: _____

ESCOLA: _____

CIDADE: _____

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões). A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	Nota
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
Total	

1ª. Questão - Determine o valor de k para que o sistema linear

$$S: \begin{cases} x - ky = -1 \\ x - k^2y = -k \end{cases} \quad \text{onde } x, y, k \in \mathbb{R}$$

tenha:

- a) - Uma única solução. Qual é essa solução ?
- b) - Mais de uma solução. Qual é o conjunto solução ?
- c) - Nenhuma solução.

Em cada um dos itens acima, dê uma interpretação geométrica para a solução de S .

Resolução.

Isolando a variável x na primeira equação de S , temos que $x = ky - 1$. Substituindo esta equação na segunda equação do sistema linear obtemos que

$$(k - k^2)y = 1 - k. \quad (3)$$

Analisando esta equação e observando que as duas equações de S , representam duas retas, segue que:

- a) S tem uma única solução se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, pois desta forma $(k - k^2) \neq 0$ e $y = (1 - k) / (k - k^2)$, $x = 0$ é a solução do sistema. Neste caso, as duas retas representadas pelas equações de S , interceptam-se em um único ponto, ou seja o ponto de intersecção é a solução de S .
- b) S possui infinitas soluções se $k = 1$. Neste caso, a Eq. (3) torna-se $0=0$, isto é, qualquer valor de y é solução da Eq. (3), com $x = ky - 1$, isto é, o conjunto solução é formado pelos pares ordenados da forma $(ky - 1, y)$ com y sendo um número real. Neste caso, as duas retas são coincidentes.
- c) S não possui solução alguma se $x = 0$, pois não existe valor de y que torne a Eq. (3) verdadeira, isto é, $0y = 1$. Neste caso, as duas retas são paralelas.

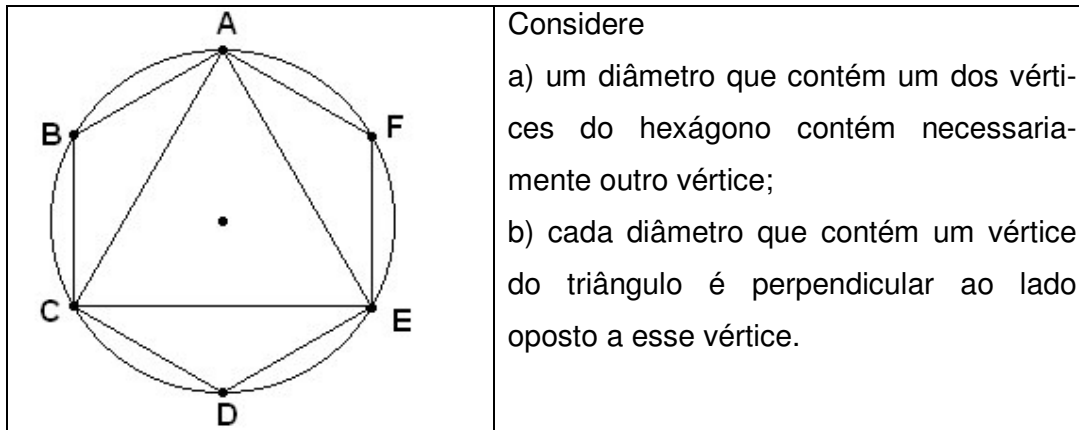
PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

2ª. Questão - A família Svarovski faz malabarismos no “Circo Russo” há anos. Em comemoração ao aniversário de seu patriarca, eles resolveram construir uma pirâmide humana de quatro andares. A façanha vai ser fotografada e publicada em uma revista. A pirâmide deve ser construída de maneira que na base, além do Sr. Svarovski, fiquem seus três filhos mais altos. No segundo andar, ficarão os filhos que são mais baixos do que os da base e mais altos que os do terceiro andar e assim por diante. Pergunta-se:

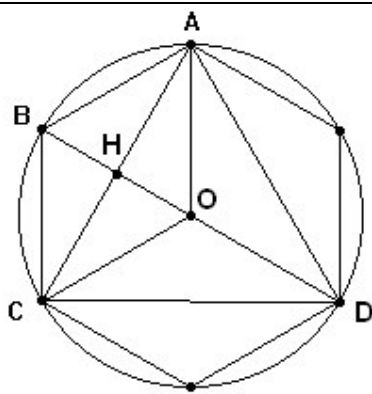
- a) - Qual é o número de posições possíveis para a foto ?
- b) - Sabendo que o Sr. Svarovski deseja aparecer no canto inferior esquerdo da foto, qual é a probabilidade de que uma foto qualquer seja adequada para a publicação ?

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

3ª. Questão - Na figura abaixo, tem-se um triângulo eqüilátero e um hexágono regular, ambos inscritos em uma circunferência de raio 10 cm. Determine a área do triângulo ABC.



Resolução.



Vamos usar a notação $\angle ABC$ para indicar o ângulo formado pelos segmentos AB e BC e também para indicar sua medida.

Sabemos que cada ângulo interno de um triângulo eqüilátero mede 60° e que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é

metade da medida de um ângulo central. Assim, $\angle AOC = 120^\circ$. Como DH é perpendicular a AC então é altura do $\triangle ACD$ e, portanto, mediana do triângulo ACD, pois este é eqüilátero. Assim, os triângulos AHO e CHO são congruentes (caso LAL: $CH=AH$, OH lado comum e ângulos retos no vértice H). Assim, OH é bissetriz do ângulo AOC que, como já vimos, mede 120° .

Logo, $\angle AOH = 60^\circ$, $\angle OAH = 30^\circ$ pois $\triangle AOH$ é retângulo, portanto $\sin(\angle OAH) = OH/AO$ (cateto oposto dividido pela hipotenusa), ou seja, $\sin(30^\circ) = OH/10$. Logo, $OH=10 \times (1/2)=5$.

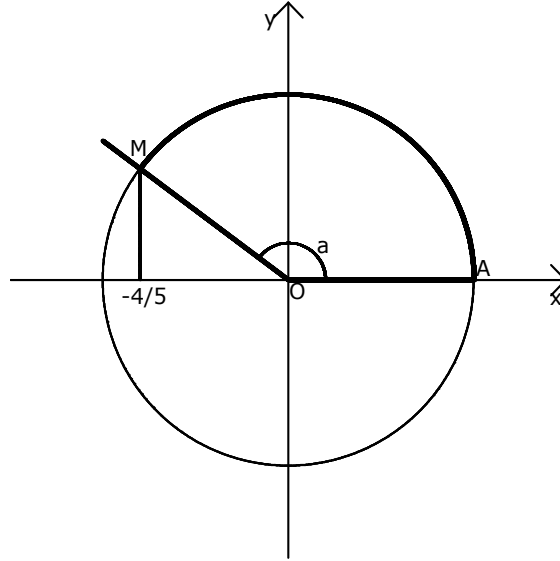
Como $BH = BO - OH = 10 - 5 = 5$ e BH é a altura do triângulo ABC, resta descobrir a medida m do lado AC.

Sendo AC lado do triângulo eqüilátero ACD de altura $h = HD = OH + OD = 5 +$

$$10 = 15, \text{ temos: } h = m \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ logo, } m = 2h \frac{\sqrt{3}}{3} = 30 = 10\sqrt{3}$$

$$\text{Área do } \triangle ABC = mh/2 = 10 \times \sqrt{3} \times 15/2 = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

4ª. Questão - Considere o arco $\widehat{AM}$ de medida a mostrado na Figura:



- a) Calcule $\sin(2 \cdot a)$
- b) Calcule $\cos(2 \cdot a)$
- c) Em que quadrante está a extremidade do arco de medida $2 \cdot a$?

Resolução.

(a) Calcule $\sin(2 \cdot a)$

Tem-se: $\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \text{sena} \cdot \cos a$.

De $\cos a = -\frac{4}{5}$, vem:

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \quad \therefore \text{sena} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Então: } \sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

(b) Calcule $\cos(2 \cdot a)$

Tem-se: $\cos(2 \cdot a) = \cos^2 a - \sin^2 a$.

$$\text{Então: } \cos(2 \cdot a) = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

(c) Em que quadrante está a extremidade do arco de medida $2 \cdot a$?

Uma vez que $\sin(2 \cdot a) < 0$ e $\cos(2 \cdot a) > 0$, conclui-se que a extremidade do arco está no quarto quadrante.

PROVA PARA OS ALUNOS DO 2o. ANO DO ENSINO MÉDIO

5ª. Questão - Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 3 e $B = k \cdot A$, onde k é uma constante real diferente de zero. Sabendo-se que $\det(B^t) = 96$ e $\det(A) = 1,5$, determine o valor de k.

Resolução.

Pelas propriedades dos determinantes temos que:

$$\text{➤ } \det(B^t) = \det(B)$$

$$\text{➤ } \text{Se } B = k \cdot A \Rightarrow \det(B) = k^3 \cdot \det(A)$$

$$\text{Logo: } 96 = k^3 \cdot 1,5 \Rightarrow k^3 = 64 \Rightarrow k = 4$$

Portanto, a solução é $k = 4$.