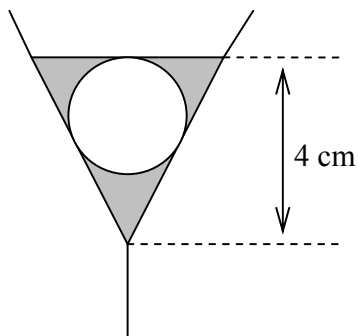


PROVA PARA OS ALUNOS DE 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

1ª **Questão:** Um cálice com a forma de um cone contém $V \text{ cm}^3$ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica com diâmetro de 2 cm é colocada dentro do cálice. Supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4 cm a partir do vértice do cone, determine o valor de V .



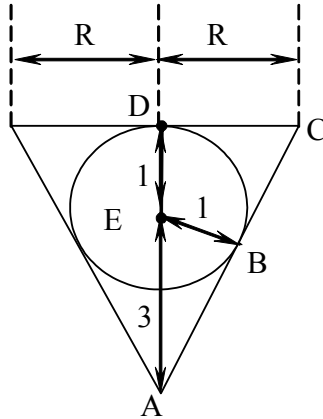
Resolução: O volume da bebida contida no cálice é igual ao volume do cálice até a altura de 4 cm menos o volume da cereja.

O volume da cereja corresponde ao volume de uma esfera de raio $r = 1 \text{ cm}$, ou seja,

$$V_{\text{cereja}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (1 \text{ cm})^3 = \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^3$$

Vamos determinar o volume do cone. Para tal, devemos obter o raio da base do cone, que será denotado aqui por R . É possível identificar dois triângulos semelhantes na figura, conforme esboço a seguir. Nesse esboço temos:

$$R = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = 4 \text{ cm}, \quad \overline{DE} = \overline{BE} = 1 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE} = 3 \text{ cm}.$$



Como o triângulo AEB é retângulo em B, utilizamos o Teorema de Pitágoras para obter:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{9 - 1} \text{ cm} = \sqrt{8} \text{ cm}.$$

Por semelhança dos triângulos ABE e ADC, temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Logo,

$$R = \overline{CD} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{8}} = \frac{4 \text{ cm}}{\sqrt{8}} = \sqrt{2} \text{ cm}.$$

O volume do cone até a altura de $\overline{AD} = 4 \text{ cm}$ é dado por:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{2} \text{ cm})^2 4 \text{ cm} = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Logo, o volume da bebida será:

$$V_{\text{bebida}} = V_{\text{cone}} - V_{\text{cereja}} = \left(\frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} \right) \text{ cm}^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3 \approx 4,1888 \text{ cm}^3.$$

2ª Questão: Sejam r e s duas retas paralelas entre si. Marca-se 10 pontos na reta r e 8 pontos na reta s .

- a) Quantos triângulos podem ser construídos utilizando como vértices os pontos marcados em r e s ?
- b) Se um triângulo é amostrado aleatoriamente, qual a probabilidade de que sua base seja formada por dois pontos consecutivos de uma mesma reta?

Resolução:

- a) Para construirmos triângulos usando os pontos das duas retas, devemos tomar dois vértices em uma delas e o terceiro vértice na outra reta. Desta forma, temos duas situações possíveis:

- Dois vértices na reta r e um vértice na reta s

Como os vértices pertencentes à reta r não precisam estar localizados em dois pontos consecutivos e temos 10 pontos marcados em r , estes pontos podem ser tomados de $\binom{10}{2} = 45$ maneiras distintas.

Por outro lado, o outro vértice pode estar em qualquer um dos 8 pontos marcados em s . Logo, nesta construção, temos um número de triângulos possíveis igual a

$$45 \cdot 8 = 360 \text{ triângulos} \quad (1)$$

- Um vértice na reta r e dois vértices na reta s

Seguindo raciocínio análogo ao anterior, podemos tomar dois pontos em s de $\binom{8}{2} = 28$ maneiras distintas. Se o outro vértice está em r , então, temos um número de triângulos possíveis igual a

$$28 \cdot 10 = 280 \text{ triângulos} \quad (2)$$

O número de triângulos que podem ser tomados utilizando pontos das duas retas é a soma dos valores dados por (1) e por (2), ou seja, é possível construir 640 triângulos desta maneira.

b) Temos duas situações possíveis:

- Uma base do triângulo na reta r e um vértice na reta s

O número de pares de pontos consecutivos na reta r é igual a 9. Logo, existem 9 possibilidades de termos uma base do triângulo formada por dois pontos consecutivos da reta r. Como o outro vértice pode estar em qualquer um dos 8 pontos de s, temos um total de $9 \cdot 8 = 72$ triângulos.

- Uma base do triângulo na reta s e um vértice na reta r

Usando raciocínio análogo ao anterior, concluímos que existem 7 possibilidades de termos um triângulo cuja base seja formada por dois pontos consecutivos de s e, como o vértice pode estar em qualquer um dos 10 pontos marcados em r, temos um total de $7 \cdot 10 = 70$ triângulos.

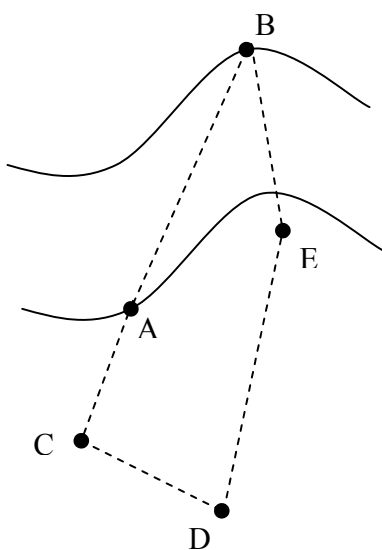
Logo, o número de triângulos formados por dois pontos consecutivos de uma mesma reta é

$$72 + 70 = 142 \text{ triângulos possíveis}$$

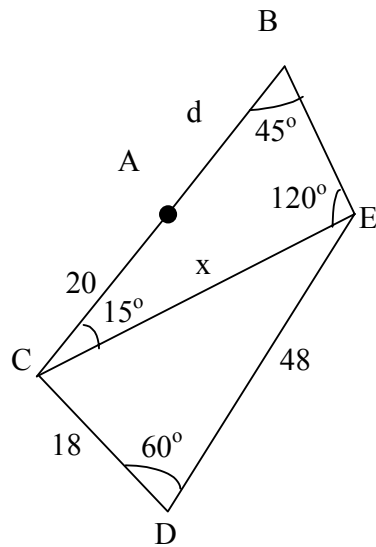
Desta forma, determinamos a probabilidade pedida, ou seja,

$$P = \frac{\text{número de triângulos formados por dois pontos consecutivos}}{\text{número total de triângulos possíveis}} = \frac{142}{640} = 0,221875$$

3ª **Questão:** Duas árvores localizam-se nos pontos A e B, nas margens opostas de um rio, como mostra o esquema da figura. Para calcular a distância entre essas árvores, um observador que se encontra junto ao ponto A, afasta-se da margem deslocando-se 20m na direção do segmento AB e chega ao ponto C. Ali ele mede o ângulo $ECB = 15^\circ$, sendo E um ponto do mesmo lado que A. Depois disso, ele caminha até um ponto D, localizado a 18 m de C, para tomar um copo d'água. Após beber sua água, o observador mede o ângulo $CDE = 60^\circ$ e caminha 48 m até o ponto E, do qual pode ver os pontos B e C e mede o ângulo $BEC = 120^\circ$. Com esses dados ele calculou corretamente a distância entre as árvores, com precisão de uma casa decimal. Que valor ele obteve?



Resolução: O problema pode ser resolvido com o auxílio do esboço que segue e combinando a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.



Para determinar a distância x , aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo CDE:

$$x^2 = (18^2 + 48^2 - 2 \cdot 18 \cdot 48 \cdot \cos 60^\circ) \text{ m}^2 = (324 + 2304 - 864) \text{ m}^2 = 1764 \text{ m}^2$$

$$x = \sqrt{1764} = 42 \text{ m}$$

Para determinar a distância d , aplicamos a Lei dos Senos ao triângulo BCE:

$$\frac{20 \text{ m} + d}{\sin 120^\circ} = \frac{42 \text{ m}}{\sin 45^\circ}$$

$$d \approx 31,4 \text{ m}.$$

Na resolução foram usados os seguintes valores das funções trigonométricas:

$$\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4ª **Questão:** Encontre todas as matrizes A que satisfazem a equação

$$AA' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

em que A' é a matriz transposta de A .

Resolução: Primeiramente é necessário determinar as dimensões da matriz A . Seja $A_{m \times n}$. No segundo termo do membro esquerdo da equação temos o produto de uma matriz 2×2 com $A_{m \times n}$, portanto, $m = 2$. Esse produto é uma matriz $2 \times n$. Como no membro direito da equação temos uma matriz 2×1 , deduz-se que $n = 1$. Então A tem dois elementos, que denotaremos x e y , dispostos em duas filas e uma coluna. Verifica-se também que o primeiro termo é o produto de matrizes 2×1 , 1×2 e 2×1 , que dá uma matriz 2×1 , como deveria ser.

Usando

$$A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a equação fica na forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Simplificando o membro esquerdo obtemos

$$\begin{pmatrix} x^2 + x + 2y \\ xy - 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que conduz ao sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + x + 2y = 8 & \text{(I)} \\ xy - 2x + y = 1 & \text{(II)}. \end{cases}$$

Agora, isolando y na equação (I) obtemos

$$y = \frac{8 - x - x^2}{2} \quad \text{(III)}$$

e substituindo (III) em (II) fica

$$x \frac{8 - x - x^2}{2} - 2x + \frac{8 - x - x^2}{2} = 1 \quad \text{(IV)}.$$

Simplificando a equação (IV) chega-se na equação cúbica

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 6 = 0 \quad \text{(V)},$$

que equivale a

$$x^2(x + 2) - 3(x + 2) = 0,$$

ou seja

$$(x^2 - 3)(x + 2) = 0.$$

Essa última equação tem três soluções:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -\sqrt{3} \text{ e } x_3 = \sqrt{3},$$

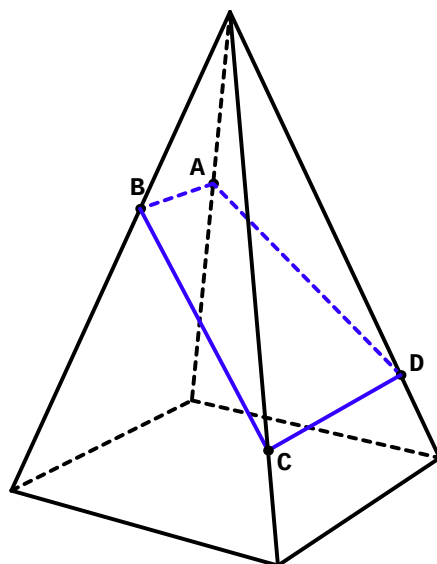
e usando a equação (III) obtemos os valores correspondentes de y . Eles são

$$y_1 = 3, \quad y_2 = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \text{ e } y_3 = \frac{5 - \sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente, a matriz A é

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{5+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } A_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{5-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

5ª **Questão:** Uma pirâmide reta tem base horizontal e quadrada de lado 10 e altura 15. Essa pirâmide é cortada por um plano inclinado. O ângulo de inclinação desse plano, em relação ao plano horizontal da base quadrada, é α . A intersecção do plano inclinado com as faces inclinadas da pirâmide é o quadrilátero $ABCD$, como mostra a figura. Os lados AB e CD desse quadrilátero são horizontais e suas medidas são 4 e 8, respectivamente.



- (a) Determine o valor do ângulo α .
- (b) Ache o comprimento dos lados BC e AD . Dê sua resposta com precisão de duas casas decimais.
- (c) O plano inclinado divide a pirâmide de base quadrada em duas partes. Calcule o volume de cada parte.

Resolução: A figura 1 mostra construções geométricas que auxiliarão o raciocínio. O vértice da pirâmide é V , enquanto $EFGH$ é o quadrado na base. $ABJK$ é o quadrado formado pela intersecção do plano, que é paralelo à base e contém o segmento AB , com as faces inclinadas da pirâmide. $CDML$ é o quadrado formado pela intersecção do plano, que é paralelo à base e contém o segmento CD , com as faces inclinadas da pirâmide. N , O e P são os pontos médios dos segmentos AB , CD e ML , respectivamente. I é o ponto médio da base, o segmento VI é perpendicular à base e seu comprimento é 15 (a altura da pirâmide). Os pontos V , N , O , P e I estão num plano vertical. A pirâmide é simétrica em relação a esse plano. A projeção ortogonal da figura 1 nesse plano encontra-se na figura 2. Essa figura também é chamada de vista frontal da pirâmide.

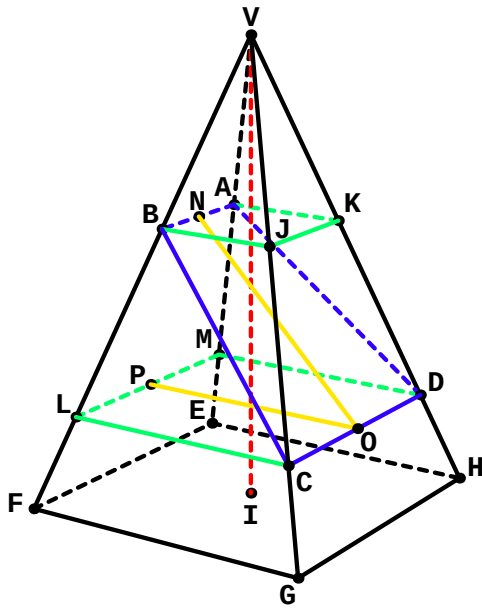


Figura 1: Construções auxiliares

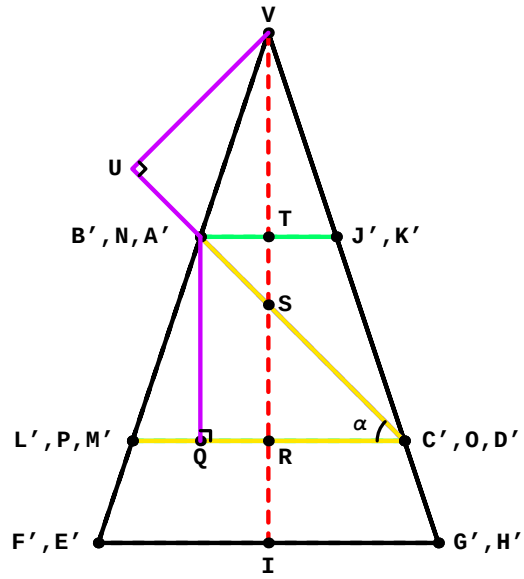


Figura 2: Vista frontal

Para diferenciar as imagens dos pontos fora do plano daquelas que correspondem a pontos do plano, utilizamos a linha supra-escrita. Por exemplo, A' é a imagem de A . É importante notar que o comprimento um segmento é conservado se e somente se esse segmento for paralelo ao plano da projeção ortogonal. Q é o pé da perpendicular ao segmento OP traçada desde N . R e T são os pontos médios dos segmentos NJ' e OP , respectivamente. S é a intersecção de NO com RT . O ponto U será explicado mais adiante.

(a) $\alpha = \angle NOP$, portanto,

$$\tan(\alpha) = \frac{NQ}{OQ}$$

De um lado, $NQ = RT = VR - VT$, sendo

$$\frac{VR}{PR} = \frac{VT}{NT} = \frac{VI}{EI}$$

com $PR = OP/2 = LC/2 = CD/2 = 8/2 = 4$, $NT = NJ'/2 = BJ/2 = AB/2 = 4/2 = 2$, $VI = 15$ e $E'I = E'H'/2 = EH/2 = 10/2 = 5$. Então

$$\frac{VR}{4} = \frac{VT}{2} = \frac{15}{5} = 3$$

e obtemos $NQ = 12 - 6 = 6$. Do outro lado, $OQ = QR + RO = NT + PR = 2 + 4 = 6$. Portanto, $\tan(\alpha) = 6/6 = 1$ e $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.

- (b) A figura 3 mostra o trapézio $ABCD$. W é o pé da perpendicular ao segmento CD traçada desde B . Por simetria $AD = BC$ e, segundo o Teorema de Pitágoras, $BC^2 = CW^2 + BW^2$. De um lado temos que $CW = (CD - AB)/2 = (8 - 4)/2 = 2$.

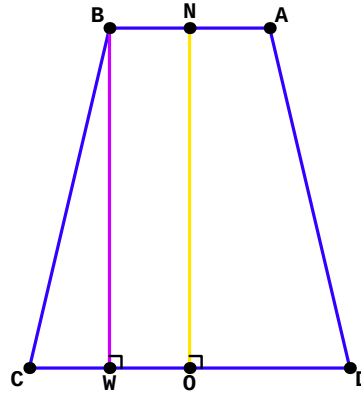


Figura 3: Trapézio $ABCD$

Do outro lado, $BW = NO = \sqrt{OQ^2 + NQ^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$ (ver o triângulo NOQ na figura 2). Então $AD = BC = \sqrt{4 + 72} = \sqrt{76} \approx 8,72$.

- (c) Sejam V_1 e V_2 os volumes das partes em que o plano inclinado divide a pirâmide $VEFGH$. Então, o volume dessa pirâmide é um terço do produto entre a área da base quadrada e a altura $VI = 15$, ou seja,

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}_{EFGH} \cdot VI = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 15 = 500.$$

Seja V_1 o volume da parte acima do plano, que é a pirâmide oblíqua $VABCD$. A base dessa pirâmide é o trapézio $ABCD$, que tem área

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot NO = \frac{4 + 8}{2} \cdot \sqrt{72} = 36 \sqrt{2}$$

(ver figura 3). Para determinar a altura de $VABCD$, representou-se na figura 2 a projeção da perpendicular ao plano da base desde V . U é o pé dessa perpendicular e, portanto, VU é a altura de $VABCD$. Como $\angle SVU = \alpha = 45^\circ$ e SVU é um triângulo retângulo em U , obtemos que $VU = VS \cdot \sin(\alpha) = (VR - RS) \cdot \sin(\alpha) = (VR - RO) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(12-4)\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Então

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}_{ABCD} \cdot VU = \frac{1}{3} \cdot 36 \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 96$$

e $V_2 = 500 - V_1 = 500 - 96 = 404$.