PROVA PARA OS ALUNOS DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

1ª Questão – A menina Joana foi passar uns dias de férias na fazenda da avó. Nesses dias observou-se que:

(i) choveu 9 vezes, de manhã ou de tarde
(ii) sempre que chovia de tarde fazia bom tempo de manhã
(iii) houve 5 manhãs de sol
(iv) houve 6 tardes de sol.

Diante destes dados, determine quantos dias Joana passou na fazenda da avó.

Resolução:

Consideremos que:

- x representa os dias que choveram de manhã
- y representa os dias que choveram à tarde
- z representa os dias que não choveram
- n representa o número total de dias que choveram de manhã, ou à tarde, ou que não choveram. Observe que não existiu dia em que choveu de manhã e a tarde devido ao fato que sempre que chovia de tarde fazia bom tempo de manhã.

Segundo as considerações acima quer-se obter o valor de n.
Como houve 5 manhãs de sol, segue que

$$n - x = 5. \qquad (1)$$

Como houve 6 tardes de sol, temos que

$$n - y = 6. \qquad (2)$$

Além disso, choveu 9 vezes, de manhã ou de tarde, o que significa que

$$x + y = 9. \qquad (3)$$

Somando-se as equações (1), (2) e (3) obtém-se que 2n=20, ou seja, n=10. Portanto, Joana passou 10 dias na fazenda da avó.

2ª Questão – Após passar desta para a melhor (ou pior, dependendo do resultado do julgamento), João Perfeito da Silva viu-se face a face com o Criador. Emocionado disse: “Eis aqui seu servo. Dediquei minha vida em prol de meus semelhantes, exercendo com dignidade os mandatos eletivos a mim outorgados pela população, que em mim confiava os seus votos. Terei direito à felicidade eterna? Teria eu o direito de “voltar à Terra” e usufruir dos dólares guardados na Suiça?”. Diz o Senhor: “Serás julgado como político que fostes. Para cada promessa não cumprida receberás um ponto; para cada desvio de verba, receberás 20 pontos; a cada ação em favor da população humilde descontarás 5 pontos. Está indicado nos apontamentos que a quantidade de pontos por desvio de verbas coincide com a quantidade por promessas não cumpridas; e que a quantidade de ações em favor da população humilde, corresponde a 5% do total de promessas não cumpridas. Assim, ao término dos cálculos posso lhe adiantar que não terás direito a 70 sogras pois, para isso, precisarias obter, pelo menos, 666 pontos, o que seria possível se você tivesse realizado um desvio a mais de verbas. Sua pena não será branda, porém estou disposto a reduzi-la caso indique precisamente quantas promessas não cumpridas você teve a insensatez de fazer”.

Calcule o número de promessas não cumpridas pelo “nobre colega” para aumentar suas chances nesta Olimpíada.

Resolução:
Consideremos que:

- **p** representa a quantidade de promessas não cumpridas
- **v** representa a quantidade de desvios de verbas
- **a** representa a quantidade de ações em favor da população humilde

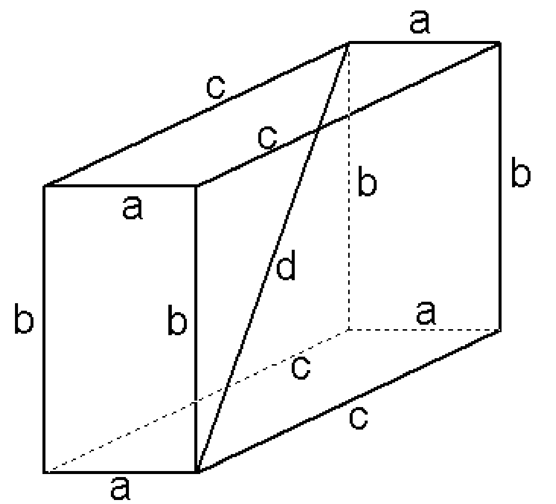
e que

- cada **p** equivale a 1 ponto
- cada **v** equivale20 pontos
- cada **a** equivale–5 pontos

Total de pontos: $\mathbf{-5a+p+20v < 666}$ (1)

Como $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} = 0{,}05\mathbf{p}$, então $\mathbf{p} = 20\mathbf{a} = 20\mathbf{v}$. Logo podemos substituir na equação (1), **a** por **v** e **p** por 20**v**, obtendo:
$-5\mathbf{v}+20\mathbf{v}+20\mathbf{v} < 666$,
ou seja,
$35\mathbf{v} < 666$ (2)
Como um desvio de verbas a mais resulta em um valor maior ou igual a 666 e cada desvio de verbas equivale a 20 pontos, então
$35\mathbf{v} + 20 \geq 666$, ou seja, $35\mathbf{v} \geq 646$ (3)
De (2) e (3) temos: $646 \leq 35\mathbf{v} < 666$ que, dividido por 35 resulta em
$18{,}45 \leq \mathbf{v} < 19{,}03$.
Logo, $\mathbf{v}=19$ e portanto, $\mathbf{p} = 20\mathbf{v} = 380$.
Assim, o “nobre colega” fez 380 promessas que não cumpriu.

3ª Questão – Seja **P** um paralelepípedo regular de dimensões **a**, **b** e **c**. Sabendo-se que a soma de suas arestas é 4**s** e sua diagonal é **d**, calcule a área total de **P** em função de **s** e **d**.



Resolução:

A área total é dada por $A_t = 2ab+2ac+2bc$ (1)

A soma das arestas é $4s = 4a+4b+4c = 4(a+b+c) \Rightarrow a+b+c = s \Rightarrow (a+b+c)^2 = s^2 \Rightarrow$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = s^2 \Rightarrow 2ab+2ac+2bc = s^2 - (a^2+b^2+c^2)$ (2)

De (1) e (2) obtemos: $A_t = s^2 - (a^2+b^2+c^2)$ (3)

A diagonal do paralelepípedo é de fácil dedução e é dada por:

$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ou seja, $d^2 = a^2+b^2+c^2$ (4)

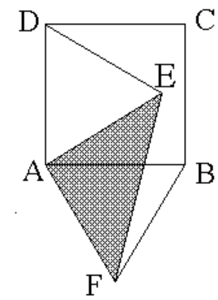
Logo, de (3) e (4) obtemos : $A_t = s^2 - d^2$

4ª Questão – Calcule a área da região marcada, na figura plana abaixo, sabendo-se que:

a) o quadrado ABCD tem lados de 7cm;

b) triângulo ADE é eqüilátero e

c) o triangulo ABF também é eqüilátero.



Resolução:

Como AD mede 7 cm então AE também mede 7 cm pois, o triângulo ADE é eqüilátero.

Como o triângulo ABF é equilátero e AB mede 7 cm então AF também mede 7 cm.

Sabendo que os ângulos internos de um triângulo eqüilátero medem 60º, note que o ângulo EÂB = 90º-60º = 30º e que o ângulo BÂF = 60º. Logo, o ângulo EÂF = 90º.

Como a área do triângulo é dada por:

A_T= (base)$\times$(altura)/2, (1)

tomando em (1), AF como base e AE como altura, a área do triângulo é igual a:

A_T= $(7\times7)/2 = 24{,}50\ cm^2$.

5ª Questão – Se x é a medida de um ângulo expresso em radianos, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule todas as soluções da equação:

$\sqrt{12}$ sen($11x$) + 3 cos($5x$) – $\sqrt{3}$ sen($5x$) = 0.

Resolução.

a) dividindo os membros da equação por $\sqrt{12}$ temos: $\operatorname{sen}(11x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(5x)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(5x)=0$ (1)

b) como $\frac{\sqrt{3}}{2}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, reescreve-se (1) como:

$$\operatorname{sen}(11x)+\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(5x)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}(5x)\right]=0 \ (2)$$

c) como $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$, a equação (2) fica:

$$\operatorname{sen}(11x)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=0 \ (3)$$

d) como $\operatorname{sen}(\alpha)=-\operatorname{sen}(-\alpha)$, pode-se reescrever (03) como segue:

$$\operatorname{sen}(11x)-\operatorname{sen}\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=0\text{, ou seja, }\operatorname{sen}(11x)=\operatorname{sen}\left(5x-\frac{\pi}{3}\right).\ (4)$$

e) agora, $\operatorname{sen}(\alpha)=\operatorname{sen}(\beta)$ se, e somente se, existe um número inteiro n tal que, $\alpha=\beta+2n\pi$ ou $\alpha=\pi-\beta+2n\pi$. Portanto, em (4), $\operatorname{sen}(11x)=\operatorname{sen}\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$ se, e somente se, existe um número inteiro n tal que $11x=5x-\frac{\pi}{3}+2n\pi$ ou $11x=\pi-\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)+2n\pi$, ou seja, $x=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$ ou $x=\frac{n\pi}{8}+\frac{\pi}{12}$.

f) como $0<x<\frac{\pi}{2}$, fica: $x=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$ e $0<\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$ ou $x=\frac{n\pi}{8}+\frac{\pi}{12}$ e $0<\frac{n\pi}{8}+\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$,

ou seja, $x=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$ e $\frac{1}{6}<n<\frac{5}{3}$ ou $x=\frac{n\pi}{8}+\frac{\pi}{12}$ e $-\frac{2}{3}<n<\frac{10}{3}$.

g) como n é um número inteiro, no primeiro caso

$x=\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$ e $n=1$, portanto, $x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{18}=\frac{5\pi}{18}$, enquanto no segundo caso,

$$x=\frac{n\pi}{8}+\frac{\pi}{12}\text{ e }(n=0\ \text{ ou }\ n=1\ \text{ ou }\ n=2\ \text{ ou }\ n=3)\text{, portanto,}$$

$$x=\frac{\pi}{12}\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{24}\ \text{ ou }\ x=\frac{2\pi}{8}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}\ \text{ ou }\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{12}=\frac{11\pi}{24}.$$

h) Finalmente, o conjunto das soluções da equação $\sqrt{12}\ \text{sen}(11x) + 3\ \cos(5x) - \sqrt{3}\,\text{sen}(5x) = 0$ satisfazendo a condição $0 < x < \frac{\pi}{2}$ é dado por: $\left\{\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{24},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{11\pi}{24}\right\}$.