PROVA DA 1ª SÉRIE - ORMUB - 2010

1ª Questão: Em uma cidade, com 4096 habitantes, cada torcedor do time local consegue convencer mais três habitantes, semanalmente, a torcer pelo time e 01 habitante a participar das atividades realizadas pela torcida organizada deste time. Baseado nesta informação, considerando que inicialmente o time só tinha um torcedor – o fundador do time, determine:

a) a função que define o número de habitantes que irão torcer pelo time e a função que determina os participantes das atividades realizadas pela torcida organizada, decorridas **s** semanas dos primeiros habitantes a torcer ou a participar destas;

b) quantos habitantes estarão participando das atividades realizadas pela torcida organizada, quando todos os habitantes estiverem convencidos a torcer pelo time local.

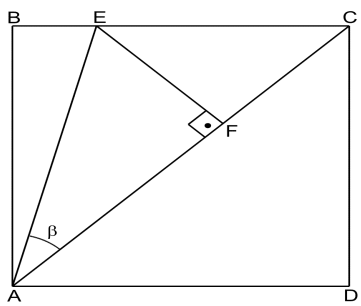
Solução: se 01 habitante convence 03 habitantes, semanalmente, e cada um destes convence mais 03 por semana a torcer pelo time, então, a função que determina o número de habitantes convencidos a torcer por este time é:

$F(s) = (1 + 3)^s = (4)^s$; enquanto que, o número de habitantes a participar das atividades organizadas é: $G(s) = (1 + 1)^s = (2)^s$; Se o número de habitantes é $4096 = 4^6 = 2^{12}$, então:

para determinar o número de semanas em que todos os habitantes estarão convencidos a torcer pelo time local faz-se: $F(s) = (4)^s = 4096 = 4^6$, e assim, s = 6 semanas, ou seja, em 06 semanas todos os habitantes da cidade estarão torcendo pelo time local.

Logo, em 06 semanas, o número de habitantes que estarão participando das atividades realizadas pela torcida organizada será de: $G(6) = (2)^6 = 64$ pessoas.

2ª Questão: Um atleta que participará das *Olimpíadas dos Triângulos*, terá dois percursos C_1 e C_2 a cumprir. Conforme mostra a figura abaixo, o percurso C_1 será feito segundo a orientação A-E-F-A, enquanto que o percurso C_2 deverá ser feito seguindo a orientação A-C-D-A. Calcule, aproximadamente, as distâncias que serão percorridas em cada percurso. Qual é o percurso mais curto?



***Dados*:** ABCD é um quadrado cujo lado mede 4 km; $\beta = 30^o$; $\overline{BE} = 1\,\text{km}$.

Solução. Do triângulo retângulo ABE, tem-se:

$$\left(\overline{AE}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BE}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{AE}\right)^2 = 16 + 1 = 17 \Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{17}\ \text{km}$$

Para calcular a medida $\overline{AF}$, faz-se: $\cos\left(30^o\right) = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{17} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ km

Para calcular a medida $\overline{EF}$, faz-se: $\text{sen}\left(30^o\right) = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{EF} = \sqrt{17} \cdot \dfrac{1}{2}$ km

Logo, o percurso C_1 terá a seguinte distância:

$$D_{C_1} = \sqrt{17} + \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{17}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{17}}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)\text{km}$$

Considerando que: $\sqrt{17} \cong 4$ e que $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, vem: $D_{C_1} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right) \cong \dfrac{4}{2}(3 + 1{,}7) \cong 9{,}4$ km

Por outro lado, do triângulo ACD, vem:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \left(\overline{AD}\right)^2 + \left(\overline{DC}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{AC}\right)^2 = 16 + 16 = 2 \cdot 16 \Rightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{2}\text{ km}$$

Logo, o percurso C_2 terá a seguinte distância: $D_{C_2} = 4\sqrt{2} + 4 + 4 = 4\left(\sqrt{2} + 2\right)$km

Considerando que: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$, vem: $D_{C_2} = 4\left(1{,}4 + 2\right) \cong 13{,}6$ km

Portanto, $D_{C_1} < D_{C_2}$, ou seja, o percurso mais curto é C_1.

3ª Questão: Um jogador de futebol está com o passe colocado à venda da seguinte forma: o time ***A***, no qual ele joga atualmente, está disposto a pagar ***a*** milhões pela permanência dele no time; o time ***B*** oferece ***b*** milhões pela aquisição do craque. Os valores de ***a*** e ***b*** são dados pelo sistema:

$$(S): \begin{cases} \log_2(a) + \log_2(b) = 2 \\ \log_3\left(\dfrac{a}{b}\right) = 2 \end{cases}.$$

Pergunta-se: quem está pagando mais pelo jogador?

Solução: Usando as propriedades de logaritmo na primeira equação de (S), vem:

$$(S): \begin{cases} \log_2(ab) = 2 \\ \log_3\left(\dfrac{a}{b}\right) = 2 \end{cases}$$

. Da definição de logaritmo, segue-se que:

$(S): \begin{cases} 2^2 = ab \\ 3^2 = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ \dfrac{a}{b} = 9 \Rightarrow a = 9b \end{cases}$, de onde se conclui que $a = 6$ e $b = \dfrac{2}{3}$, ou seja, o time ***A*** está disposto a pagar 6 milhões e o time ***B*** apenas $\dfrac{2}{3}$ milhões.

4ª Questão: Pedro recebe um salário mensal de R$ 1.000,00. Ele deposita mensalmente, em uma conta de investimento, 8% de seu salário. Essa conta de investimento paga 6% ao ano, em regime de juros simples. Ao final de 12 meses de depósitos, quanto dinheiro Pedro terá nessa conta?

Solução: Em regime de juros simples, os juros são calculados em relação ao monte depositado e não é acumulativo. Uma taxa de 6% ao ano equivale a $\frac{6\%}{12} = 0{,}5\%$ ao mês, então $t = 0{,}5\%$. A fórmula do juro simples é $J = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$. Para a situação do problema, temos que $i = 1\,\text{mês}$. Assim:

1º mês $\Rightarrow$ $80{,}00$

2º mês $\Rightarrow$ $J = \frac{80{,}00 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{100} = 0{,}40$

No 2º mês ele tem: $80{,}00$ (do 1º mês)+80,00 (deposito) + 0,40 (juros sobre 80,00 do 1º mês). Ele tem ao final do 2º mês: 160,40=80,00+80,40

3º mês $\Rightarrow$ $J = \frac{160{,}00 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{100} = 0{,}80$

No 3º mês ele tem: 160,40 (do 2º mês)+80,00 (deposito) + 0,80 (juros sobre 160,00 do 2º mês). Ele tem ao final do 2º mês: 241,20=160,40+80,80

4º mês $\Rightarrow$ $J = \frac{240{,}00 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{100} = 1{,}20$

No 4º mês ele tem: 241,20 (do 3º mês)+80,00 (deposito) + 1,20 (juros sobre 240,00 do 3º mês). Ele tem ao final do 2º mês: 322,40=241,20+81,20

Note que nesta sequência, do que ele tem a cada mês, forma a soma dos termos de uma PA:

1º mês $\Rightarrow$ $80{,}00$

2º mês $\Rightarrow$ $160{,}40 = 80{,}00 + 80{,}40$

3º mês $\Rightarrow$ $241{,}20 = 80{,}00 + 80{,}40 + 80{,}80$

4º mês $\Rightarrow$ $322{,}40 = 80{,}00 + 80{,}40 + 80{,}80 + 81{,}20$

Soma dos termos da PA: $S = 80{,}00 + 80{,}40 + 80{,}80 + 81{,}20$

Nesta PA, temos que o primeiro termo é $a_1 = 80{,}00$ e a razão é $r = 0{,}40$. A fórmula da soma dos termos de ima PA é $S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ e a do termo geral é $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

Para $n = 12$ temos: $a_{12} = 80{,}00 + (12-1) \cdot 0{,}40 = 84{,}40$

Portanto: $S = \frac{(80{,}00 + 84{,}40) \cdot 12}{2} \Rightarrow S = 986{,}40$

Dessa forma, Pedro ao realizar o décimo segundo depósito terá um montante de R$ 986,40.

5ª Questão: a) Qual a quantidade de números ímpares positivos que não são múltiplos de 3 nem de 7, mas são menores que 100?

b) Qual a quantidade de tais números que são menores que 1.000?

Solução:

a) Pode ser feito eliminado os múltiplos de 3 e os de 7 na lista dos ímpares de 1 a 99:

1	3	**5**	7	9	**11**	**13**	15	**17**	**19**	21	**23**	**25**	27
29	**31**	33	35	**37**	39	**41**	**43**	45	**47**	49	51	**53**	**55**
57	**59**	**61**	63	**65**	**67**	69	**71**	**73**	75	77	**79**	81	**83**
85	87	**89**	91	93	**95**	**97**	99						

Observe que 21 e 63 são os múltiplos de 3 e de 7 entre 0 e 100.

Resultado: 28 números ímpares entre 0 e 100 não são múltiplos nem de 3 nem de 7.

b) Calculamos: (i) a quantidade **x** de números ímpares entre 0 e 1.000; (ii) a quantidade **y** de ímpares múltiplos de 3 entre 0 e 1.000; (iii) a quantidade **z** de ímpares múltiplos de 7, que não são múltiplos de 3, entre 0 e 1.000. A quantidade pedida é dada por **x – y – z**.

(i) a quantidade **x** de números ímpares entre 0 e 1.000 é dada pelo número de termos da progressão aritmética de razão r=2, primeiro termo $a_1 = 1$ e último termo $a_n=999$.

Pela fórmula do termo geral de uma PA, $a_n=a_1+(n-1)r$, temos: $999=1+(\mathbf{x}-1).2 \Rightarrow \underline{\mathbf{x}=500}$

(ii) Os ímpares múltiplos de 3 são: 3, 9, 15, 21, ... Assim, a quantidade **y** de ímpares múltiplos de 3 entre 0 e 1.000 é dada pelo número de termos da progressão aritmética de razão r=6, primeiro termo $a_1 = 3$ e último termo $a_n =999$.

De $a_n=a_1+(n-1)r$, temos: $999=3+(\mathbf{y}-1).6 \Rightarrow \underline{\mathbf{y}=167}$

(iii) Os ímpares múltiplos de 7 são: 7, 21, 35, 49, ... Assim, a quantidade de ímpares múltiplos de 7 entre 0 e 1.000 é dada pelo número de termos da progressão aritmética de razão r=14, primeiro termo $a_1 = 7$ e último termo $a_n =987$.

De $a_n=a_1+(n-1)r$, temos: $987=7+(n-1).14 \Rightarrow n=71$

Para encontrar **z**, precisamos diminuir do valor encontrado acima, a quantidade de múltiplos de 3 que aparecem entre os ímpares que são múltiplos de 7, ou seja, a quantidade de múltiplos de 21 (=3x7) que estão entre os ímpares entre 0 e 1.000.

Da mesma forma como já foi feito, a quantidade de ímpares múltiplos de 21 entre 0 e 1.000 é dada pelo número de termos da progressão aritmética de razão r=42, primeiro termo $a_1 = 21$ e último termo $a_n =987$.

De $a_n=a_1+(n-1)r$, temos: $987=21+(n_1-1).42 \Rightarrow n_1=24$.

Assim, $\mathbf{z}=n-n_1=71-24=47$.

Portanto, a quantidade pedida é igual a **x – y – z** = 500-167-47=500-212=286.