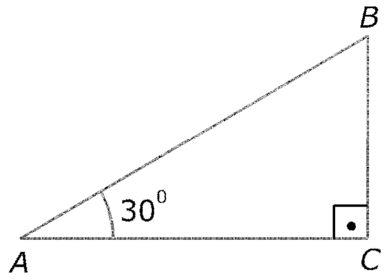
PROVA DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - ORMUB - 2009

1) Marcos possui um terreno em forma triangular, conforme mostra a Figura:



Ele pretende ceder um pedaço desse terreno para seu filho Júnior construir uma casa. A parte do terreno que Júnior ganhará terá a forma do triângulo *DBC*, onde *D* é o ponto médio do lado *AC*. Sabendo que o lado *AB* do terreno de Marcos mede 30 m, determine o comprimento do muro que Júnior deverá construir de *B* até *D* para fechar seu terreno.

<u>Resolução</u>. Do triângulo *ABC*, tem-se:

$$sen\left(30^0\right) = \frac{\overline{BC}}{30} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{30} \Rightarrow \overline{BC} = 15\,m\ ;$$

$$cos\left(30^0\right) = \frac{\overline{AC}}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BC}}{30} \Rightarrow \overline{AC} = 15\sqrt{3}\ m$$

Então: $\overline{DC} = \frac{15\sqrt{3}}{2}m$ e vem:

$$\left(\overline{DB}\right)^2 = \left(\overline{DC}\right)^2 + \left(\overline{BC}\right)^2 = \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (15)^2 = (15)^2\left(\frac{3}{4}+1\right)$$

Portanto:

$$\overline{DB} = \sqrt{(15)^2\left(\frac{3}{4}+1\right)} = 15\,\frac{\sqrt{7}}{2}\,m\,.$$

****

2) A parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo y no ponto $(0,1)$ e tem o mesmo vértice da parábola de equação $y = -2x(x-1)$. Determine os coeficientes a, b e c e represente graficamente as parábolas em um mesmo plano cartesiano.

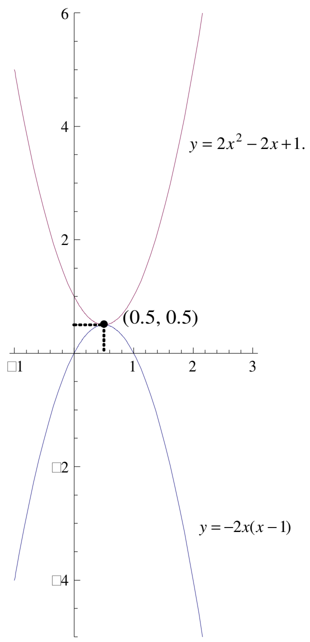
<u>Resolução:</u>

Seja $y = ax^2 + bx + c$ (1)

a equação da parábola a ser determinada.

Como a parábola deve interceptar o eixo y no ponto $(0,1)$, esse ponto deve satisfazer a Equação (1), ou seja, $1 = a(0)^2 + b(0) + c$, o que implica $c = 1$.

Como a parábola deve ter o mesmo vértice de $y = -2x(x-1)$, que é $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, segue que $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ e $\frac{-b^2+4ac}{4a} = \frac{1}{2}$, ou seja, $b = -a$ e $a = \frac{b^2}{2}$. Dessas duas equações segue que $b=0$ ou $b=-2$. Para $b=0$, temos que $a=0$ e, consequentemente, a Equação (1) não é uma parábola. Para $b=-2$, temos que $a=2$ e, consequentemente, a Equação (1) é a parábola procurada de $y=2x^2-2x+1$. E, os gráficos da equação dada e da parábola encontrada é dada pela figura



****

3) Um teste para saber se uma pessoa está com gripe suína é verificar se G é positivo ou negativo, onde

$$G = \log_2 y - \log_2 x \; ; \; x > 0 \; ; \; y > 0$$

e (x, y) é solução de um sistema (S).

Se o sistema (S), para uma certa pessoa, é dado por

$$(S): \begin{cases} \log_2 (xy) = 0 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

verifique se essa pessoa está ou não infectada com a gripe suína.

Resolução. Resolvendo o sistema (S), vem:

$$\begin{cases} \log_2 (xy) = 0 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 (xy) = 0 \\ \log_2 \left(\dfrac{x}{y}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 1 & (1) \\ \dfrac{x}{y} = 4 & (2) \end{cases}.$$

De (2), vem: $x = 4y$; substituindo em (1), tem-se: $4y^2 = 1$. Uma vez que $y > 0$, obtém-se um único valor para y: $y = \dfrac{1}{2}$, de onde se segue que $x = 2$.

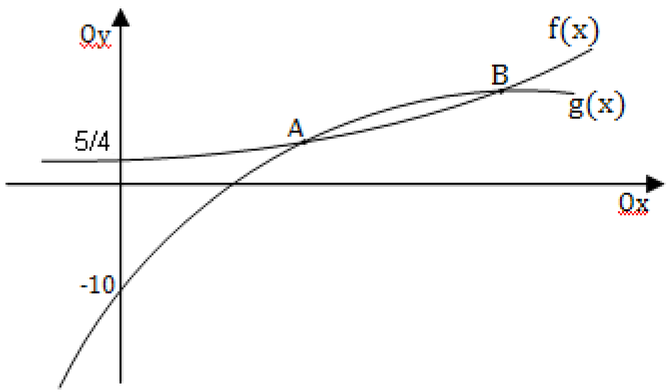
Substituindo-se esses valores em G, obtém-se:

$G = \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) - \log_2 2 = -1 - 1 = -2$.

Sendo negativo o valor de *G*, conclui-se que a pessoa não está infectada com a gripe suína.

****

4) Dadas as funções $f(x) = 2^{x-2} + a$ e $g(x) = b - 2^{4-x}$, onde a e b são constantes reais, como na figura abaixo, determine as coordenadas dos pontos A e B.



SOLUÇÃO: Como $f(0) = \frac{5}{4} \Longrightarrow 2^{0-2} + a = \frac{5}{4} \Longrightarrow a = 1$. Logo $f(x) = 2^{x-2} + 1$.

Como $g(0) = -10 \Longrightarrow b - 2^{4-0} = -10 \Longrightarrow b = 6$. Logo $g(x) = 6 - 2^{4-x}$

Os pontos A e B da figura são os pontos de interseção das duas funções, então:

$2^{x-2} + 1 = 6 - 2^{4-x} \Rightarrow 2^x \cdot 2^{-2} + 1 = 6 - 2^4 \cdot 2^{-x} \Rightarrow$

$2^x \cdot 2^2 \cdot (2^x \cdot 2^{-2} + 1) = 2^x \cdot 2^2 \cdot (6 - 2^4 \cdot 2^{-x}) \Rightarrow$

$2^{2x} + 2^x \cdot 2^2 = 2^x \cdot 2^2 \cdot 6 - 2^6 \Rightarrow 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 24 \cdot 2^x + 2^6 = 0 \Rightarrow$

$2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0.$

Fazendo $2^x = a \Rightarrow a^2 - 20a + 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \Longrightarrow 2^x = 4 \Longrightarrow x_1 = 2 \\ a_2 = 16 \Longrightarrow 2^x = 16 \Longrightarrow x_2 = 4 \end{cases}$

Fazendo $x_1 = 2$ em $f(x) = 2^{x-2} + 1 = 2^{2-2} + 1 = 2 \Rightarrow A(2{,}2)$

Fazendo $x_2 = 4$ em $f(x) = 2^{x-2} + 1 = 2^{4-2} + 1 = 5 \Rightarrow B(4{,}5)$

****

5) Um automóvel parte de Bauru em direção a Belo Horizonte a uma velocidade de 80 Km/h. Após andar durante uma hora nesta velocidade, o motorista perde a paciência e vai aumentando gradativamente a velocidade, de modo que a cada hora ele aumenta a velocidade em 10%, e a mantém constante por 1 hora, o que mostra que o motorista não estava tão impaciente. Considerando que o nível de espanto é uma função em relação à velocidade e é dada pela fórmula:

E(v) = -v se v < 0

E(v) = 0 se 0 ≤ v ≤ 100

E(v) = v-100 se v>100

a) Calcule o espanto do operador de radar ao verificar a velocidade com que o carro chega ao seu destino, sabendo-se que para isso precisa percorrer 731 Kms.

b) Qual a distância percorrida após 75 minutos de viagem?

c) Indique qual seria a velocidade final se o motorista rodasse durante 1.230 minutos e qual seria a distância percorrida?

d) Faça o gráfico da função nível de espanto, dada acima.

Resolução.

a) Na 1ª hora ele andou 80 Kms, na 2ª andou 88 Kms, na 3ª andou 96,8 Kms, na 4ª andou 106,48 Kms, na 5ª andou 117, 128 Kms, na 6ª andou 128,8408 Kms, na 7ª andou 141,72488 Kms.

Assim, no final da 6ª hora rodou 617,2488 Kms, portanto chega ao seu destino durante a 7ª hora e sua velocidade de chegada é de 141,72488 Km/h. Logo, o nível de espanto é E(141,72488) = 141,72488 - 100 = 41,72488

b) 80 + 88/4 = 102 Kms.

c) A velocidade do carro, tomada de hora em hora, forma uma progressão geométrica de razão 1,1 e termo inicial igual a 80.

Também, 1230 minutos é igual a 20 horas e trinta minutos. Assim, a velocidade seria a da 20ª hora, ou seja, velocidade = $80x(1,1)^{20}$ Km/h.

d)