PROVA DA 1ª SÉRIE - ORMUB/2008

Questão 1: Sejam ***a*** e ***b*** dois números inteiros, com $a \neq 0$. Diz-se que ***a*** divide ***b*** se a fração $\frac{b}{a}$ é um número inteiro. Sabendo-se, ainda, que o fatorial de um número natural ***n*** é definido por:

$0! = 1$;

$1! = 1$;

$2! = 1 \cdot 2 = 2$;

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

$\vdots$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$;

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$,

pergunta-se: qual é a maior potência de 2 que divide 30! ?

Resolução:

30! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.

Mas, 2 = 2, 4 = 2^2, 6 = 2.3, 8 = 2^3, 10 = 2.5, 12 = 2^2.3, 14 = 2.7, 16 = 2^4. 18 = 2.9, 20 = 2^2.5, 22 = 2.11, 24 = 2^3.3, 26 = 2.13, 28 = 2^2. 7, 30 = 2.15.

Logo, 30! = 2^{26}.3.5.7.9.5.11.3.13.7.15.1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29.

Assim, a maior potência de 2 que divide 30! é 2^{26}.

Questão 2: Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, onde $v(t)$ é o número de elementos vivos no tempo ***t*** (medido em meses). Sabendo-se que o último frango morreu um ano após o início da experiência, determinar qual é a quantidade de frangos que ainda estava viva no décimo mês.

Resolução: consideremos $t = 0$ como o tempo em que ocorreu o início da experiência. Desta forma, temos que $v(0) = 720$ e que $v(12) = 0$. Da primeira equação, segue-se que $b = 720$ e, da segunda, que $a = -5$. Portanto, segue-se que $v(t) = -5t^2 + 720$, o que implica que $v(10) = -5(10)^2 + 720 = 220$. Ou seja, havia 110 frangos vivos no 10^o mês.

Questão 3: Um helicóptero e um barco da polícia perseguem um barco de piratas. O helicóptero está a 200 m de altura e o barco da polícia está bem embaixo do helicóptero (na vertical). Do helicóptero, o barco dos piratas é avistado segundo um ângulo de 60^o. Qual é a distância entre o barco da polícia e o barco dos piratas?

Resolução: pode-se, a partir do enunciado do problema, considerar a Figura 1:

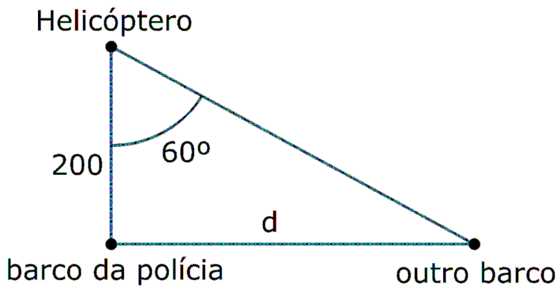

FIGURA 1

O objetivo é determinar a medida **d**. Tem-se:

$$tg60^o = \frac{d}{200} \Rightarrow d = 200 \cdot tg60^o = 200 \cdot \frac{sen60^o}{\cos 60^o} = 200 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 200 \cdot \sqrt{3}.$$

Logo, a distância entre os dois barcos é de $200 \cdot \sqrt{3}$ m.

Questão 4: Determinar o domínio da função: $f(x) = \sqrt{4 - \left| x^2 - 6 \cdot x + 4 \right|}$.

Resolução: deve-se ter: $4 - \left| x^2 - 6 \cdot x + 4 \right| \geq 0$, ou seja, $\left| x^2 - 6 \cdot x + 4 \right| \leq 4$. Assim, vem:

$-4 \leq x^2 - 6 \cdot x + 4 \leq 4$.

Resolvem-se, então, as inequações:

$(I)\ -4 \leq x^2 - 6 \cdot x + 4 \Rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 4 \geq -4 \Rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 8 \geq 0$.

Para determinar os valores da variável **x** que tornam verdadeira esta inequação, resolve-se, primeiramente, a equação:

$x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$.

Assim, o estudo de sinal da função $y = x^2 - 6 \cdot x + 8$ é:

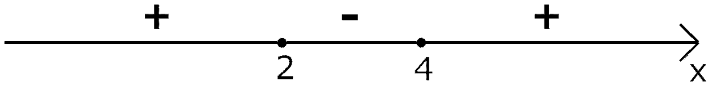

FIGURA 2

Logo, os valores de **x** que satisfazem a inequação (I) são aqueles que são menores ou iguais a 2 ou maiores ou iguais a 4.

Resolve-se, agora, a inequação:

(II) $x^2 - 6 \cdot x + 4 \leq 4 \Rightarrow x^2 - 6 \cdot x \leq 0$.

A equação do 2º grau $x^2 - 6 \cdot x = 0$ tem raízes x = 0 e x = 6. Então, a função $y = x^2 - 6 \cdot x$ tem os sinais como na figura seguinte:

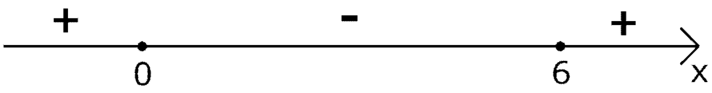

FIGURA 3

Assim, os valores de **x** que satisfazem a inequação (II) estão entre x = 0 e x = 6.

Faz-se, agora, a interseção das soluções das duas inequações, como mostra a Figura 4.

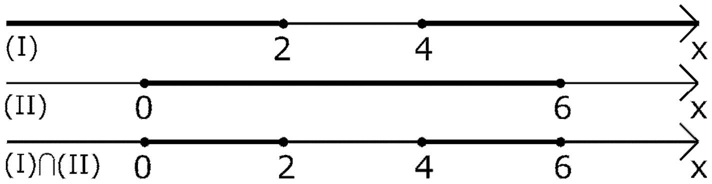

FIGURA 4

Portanto, o domínio da função dada é:

$D = \{x \in R \,/\, 0 \leq x \leq 2 \text{ ou } 4 \leq x \leq 6\}$.

Questão 5: Determinar o menor número inteiro que seja maior ou igual ao valor numérico de A, onde: $A = 3 \cdot \log_2(64) - \log_{10}(0{,}1) + \frac{4}{5} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(27) - \frac{1}{3} \cdot \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$.

Lembrete: $y = \log_b x \iff x = b^y$.

Resolução: tem-se:

$$A = 3 \cdot \log_2(2)^6 - \log_{10}(10)^{-1} + \frac{4}{5} \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \frac{1}{3} \cdot \log_5(5)^{-2}$$

$$A = 3 \cdot 6 + 1 + \frac{4}{5} \cdot (-3) - \frac{1}{3} \cdot (-2) = \frac{259}{15} \cong 17{,}26$$

Logo, o número é 18.