15ª ORMUB/2007
OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

NOME: ____________________________________

ESCOLA: __________________________________

CIDADE: __________________________________

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões. A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	Nota
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
Total	

1ª. Questão – Determine o ponto em que a função $f(x) = 4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x$ intercepta o eixo das abscissas.

Solução: Para determinar o ponto de interseção da função com o eixo das abscissas, faça $f(x) = 0$. Então: $f(x) = 4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$

$$2^{2x} + (2 \cdot 3)^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$$

$$2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$$

dividindo toda a equação por 3^{2x}, teremos

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - \frac{2 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

Fazendo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, temos:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

para t = 1 $\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, o ponto de interseção com o eixo das abscissas é o ponto O = (0, 0), ou seja, a origem do sistema. ■

2ª. Questão – Esboce, no $\mathbf{R}^2$, o gráfico da função $y = f(x) = |x| - |x-1|$. Dê o conjunto imagem da função.

Solução: Usando a definição de módulo, temos:

$$\text{(I) } |x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e

$$\text{(II) } |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), \text{se } x-1 < 0 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1), \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Temos, assim, os diagramas:

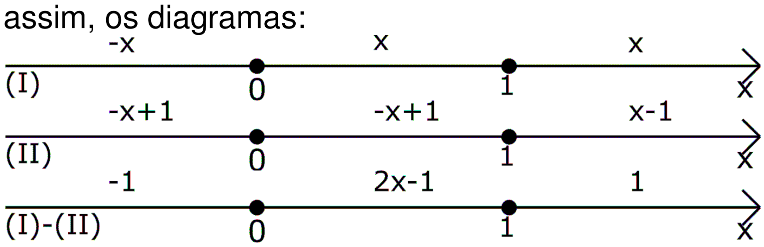


Figura 1

De acordo com a Figura 1, conclui-se que:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ,\text{se } x \leq 0 \\ 2x-1 & ,\text{se } 0 < x < 1. \\ 1 & ,\text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seu gráfico é apresentado na Figura 2.

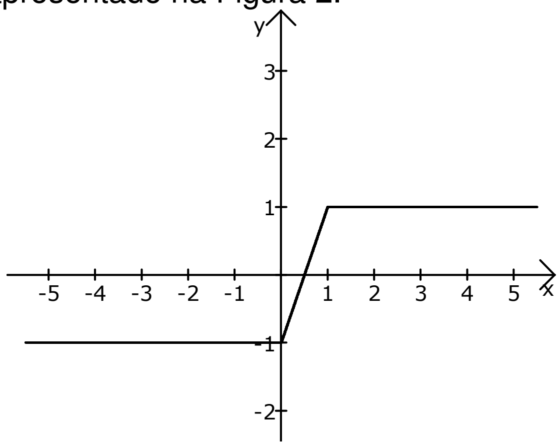


FIGURA 2

Finalmente: Im(f) = $\{y \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$. ■

3ª. Questão - Resolva a inequação: $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geq 1$.

Solução: Para que o logaritmo esteja definido, devemos ter:

$$2.x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2} \quad (\mathrm{I}).$$

A inequação dada pode ser escrita na forma:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2.x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Sendo a base um número entre **0** e **1**, segue-se que a função logarítmica é decrescente; então, vem:

$$2.x-3 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \cdot x-7 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{4} \quad (\mathrm{II}).$$

Como devemos fazer a interseção de (I) e (II), obtemos o diagrama da Figura 1.

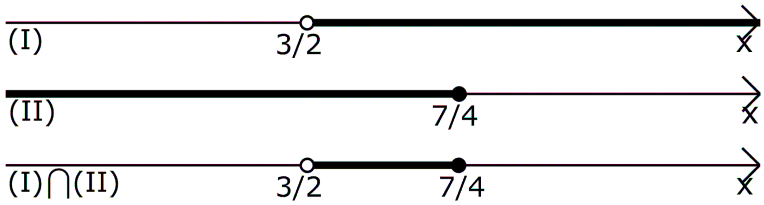


FIGURA 1

Logo, o conjunto solução da inequação dada é:

$$S=\left\{x \in \mathbf{R} / \frac{3}{2}<x \leq \frac{7}{4}\right\}=\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]. \qquad \blacksquare$$

4ª. Questão - Um número M de 30 dígitos consiste de: sete números 5, oito números 4, nove números 1, seis números 8, sendo 8 o algarismo das unidades. Qual é resto da divisão deste número por 9?

Lembrete: dizer que r é o resto da divisão de D por d, significa que D = dq+r, em que q é o quociente da divisão e o resto é sempre menor que o divisor d.

Solução: A soma dos algarismos do número M será

$$n = 7x5 + 8x4 + 9x1 + 6x8 = 124 = 117+7 = 13\times 9 + 7$$

Trocando o algarismo das unidades de M, que é 8, por 1 faz com que a soma dos algarismos do novo número (= M-7) seja múltiplo de 9, isto é, o resto da divisão de M-7 por nove é zero, ou seja, M-7 = 9q.

Assim, M = 9q+7. Portanto o resto da divisão de M por 9 é 7. ■

5ª. Questão - Moacir, ao chegar em casa, encontra Maria nervosa e esta lhe atira uma panela na cabeça, deixando-o confuso. Ao se levantar, no dia seguinte, como sempre, vai às compras, indo primeiro à padaria e depois à quitanda. Devido à sua confusão mental, acabou trocando as bolas. Trocou os gastos entre pão e laranja, entre bolo e banana e entre doces e maçãs. Sabendo-se que:

a) os gastos formam uma progressão aritmética cuja soma é R$ 20,40;

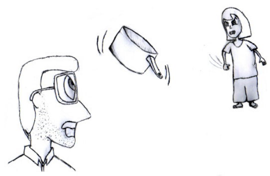
b) o menor gasto, anteriormente, era com doces;

c) a diferença entre o quinto maior gasto e o segundo é de R$ 1,20;

d) Maria achou que Moacir ficou inteligente, pois a coisa de que mais gosta é de bolo e este era o terceiro maior gasto, passando a primeiro;

e) o gasto com doce ficou menor que o gasto com pão e o gasto com banana ficou menor que o gasto com laranja, pergunta-se:

Qual o gasto de Moacir com cada um dos itens citados?



Solução: De (a) consideramos que os gastos após a pancada formam uma PA (progressão aritmética): $a_1, a_2, \ldots, a_6$, cuja soma é:

$$(a_1+a_6)6/2 = 20{,}40.$$

Portanto, $a_1 + a_6 = 6{,}80$.

De (c) temos $a_5 - a_2 = 1{,}20$.

Mas, $a_5 + a_2 = a_5 + r + a_2 - r = a_6 + a_1 = 6{,}80$, em que r é a razão da PA.

Temos então um sistema:

$a_5 + a_2 = 6{,}80$

$a_5 - a_2 = 1{,}20$

cujas soluções são $a_5 = 4$ e $a_2 = 2{,}80$.

Como $a_5 = a_2 + 3r$, então $4 = 2{,}80 + 3r$ e, portanto, $r = 0{,}40$.

$a_1 = a_2 - r = 2{,}40$; $a_3 = a_2 + r = 3{,}20$; $a_4 = a_3 + r = 3{,}60$ e $a_6 = a_5 + r = 4{,}40$.

Concluindo:

$a_1 = 2{,}40$; $a_2 = 2{,}80$; $a_3 = 3{,}20$; $a_4 = 3{,}60$; $a_5 = 4{,}00$; $a_6 = 4{,}40$;

De (b): O menor gasto era com doces, o menor gasto passou a ser com **maçãs: R$ 2,40**

De (d): O terceiro maior gasto era com bolo, o terceiro maior gasto passou a ser com **banana: R$ 3,60**. Gastou com **bolo: R$ 4,40**.

De (e) gasto com banana (= a_4) é menor que o gasto com laranja. Então o gasto com laranja = a_5, pois a_6 é o gasto com doces. Assim, foi gasto com **laranja: R$ 4,00**.

Restando a_2 e a_3 para os gastos com doces e por (e) temos então: gasto com **doce: RS 2,80** e gasto com **pão: R$ 3,20**.

Antes	**Gasto**	**Depois**
doces	2,40	maçã
maçã	2,80	doces
laranja	3,20	pão
bolo	3,60	banana
pão	4,00	laranja
banana	4,40	bolo
Total	20,40	

■