14ª ORMUB/2006
OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

NOME: ____

ESCOLA: ______________________________________

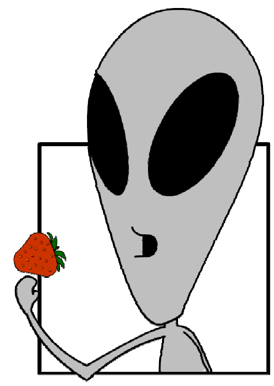
CIDADE: ______________________________________

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões). A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	**Nota**
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
Total	

1ª. Questão - Um extraterrestre, ao chegar em nosso planeta, tem a felicidade de desembarcar em uma plantação de morangos. Ao experimentar uma frutinha, gostou tanto que, quanto mais comia, mais queria comer. Assim, no primeiro minuto comeu 1 morango e, nos minutos seguintes, comia 1 morango a mais que no minuto anterior. A cada 11 minutos, o ET ejetava metade do peso ingerido nos 11 minutos anteriores, na forma de líquidos e gases. Sabendo-se que cada morango da plantação pesa 5 gramas, calcule o aumento de peso do guloso alienígena após 24 horas de comilança.

Resolução.



- Ao passar cada período de tempo múltiplo de 11 minutos, o alienígena ejeta metade do peso ingerido até o momento.
- O último minuto que é múltiplo de 11 antes de completar 24 horas (=24x60=1440 minutos) é 11*q, onde q é o resto da divisão de 1440 por 11, ou seja 1430.
- Assim, após 1430 minutos o aumento de peso do ET é igual à metade do peso que ingeriu. Para chegar no aumento total de peso, basta adicionar o peso do que foi ingerido nos últimos minutos: de 1431 a 1440.

Peso adquirido após 1430 minutos: Denotamos a_i a quantidade de morangos ingeridos no minuto i.
$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, ..., $a_{1430} = 1430$. Note que essa seqüência forma uma progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 1$, razão 1 e último termo $a_{1430} = 1430$.
Assim, a quantidade de morangos ingeridos é igual à soma da progressão:
$S = (a_1+a_{1430})$x1430/2 = 1431x1430/2 = 1.023.165 morangos
Peso ingerido: 1.023.165x5 = 5.115.825 gramas
Peso ejetado: 5.115.825/2 = 2.557.912,5 gramas
Aumento de peso: 2.557.912,5 gramas

Morangos ingeridos nos minutos finais: 1.431+1.432+...+1.440 = (1431+1440)10/2 = 14.355
Peso adquirido nos minutos finais: 14.355x5 = 71.775 gramas

Aumento de peso após 24 horas: 2.557.912,5 + 71.775 = 2.629.687,5 gramas.

2ª. Questão - Resolva a equação: $|2 \cdot x + 1| = 3 \cdot x - 5$.

Resolução.

A equação dada é resolvida usando-se a definição de módulo, isto é:

$$|2 \cdot x + 1| = \begin{cases} 2 \cdot x + 1 \text{ , se } 2 \cdot x + 1 \geq 0 \\ -(2 \cdot x + 1) \text{ , se } 2 \cdot x + 1 < 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$|2 \cdot x + 1| = \begin{cases} 2 \cdot x + 1 \text{ , se } x \geq -\dfrac{1}{2} \\ -(2 \cdot x + 1) \text{ , se } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Então:

• para $x \geq -\frac{1}{2}$, vem:

$$2 \cdot x + 1 = 3 \cdot x - 5 \Rightarrow x = 6$$

Como $6 > -\frac{1}{2}$, esse valor de **x** é uma solução da equação.

• para $x < -\frac{1}{2}$, vem:

$$-(2 \cdot x + 1) = 3 \cdot x - 5 \Rightarrow x = \frac{4}{5}.$$

Como $\frac{4}{5} > -\frac{1}{2}$, esse valor de **x** não serve.

Portanto, a equação dada tem apenas a solução x = 6, ou seja, $S = \{6\}$.

3ª. Questão - A energia liberada em um terremoto pode ser expressa em **erg** (sistema CGS). Sismólogos, no entanto, preferem trabalhar com a escala Richter, dada pela equação:

$$R = 0{,}67 \cdot \log E - 7{,}9,$$

onde **R** é a intensidade do terremoto na escala Richter e **E** é a energia liberada (em **erg**). Em 1976, houve na Guatemala um terremoto que liberou uma energia $E = 1{,}2 \cdot 10^{25}$ erg. Dado que $\log 2 = 0{,}3010$ e $\log 3 = 0{,}4771$, determine a intensidade desse terremoto na escala Richter.

Resolução.

Tem-se: $R = 0{,}67 \cdot \log E - 7{,}9$,

ou seja,

$$R = 0{,}67 \cdot \log\left(1{,}2 \cdot 10^{25}\right) - 7{,}9 \Rightarrow R = 0{,}67 \cdot \left[\log(1{,}2) + \log\left(10^{25}\right)\right] - 7{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 0{,}67 \cdot \left[\log\left(\frac{12}{10}\right) + 25 \cdot \log(10)\right] - 7{,}9 \Rightarrow R = 0{,}67 \cdot \left[\log\left(3 \cdot 2^2\right) - \log(10) + 25\right] - 7{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 0{,}67 \cdot \left[\log(3) + 2 \cdot \log(2) - 1 + 25\right] - 7{,}9 \Rightarrow R = 0{,}67 \cdot [0{,}4771 + 2 \cdot 0{,}3010 + 24] - 7{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 8{,}9030$$

4ª. Questão - Para medir a largura de um rio sem atravessá-lo, um observador situado em um ponto **A**, distante 3 m da margem, fixa o olhar em um ponto **B** da margem oposta, perpendicularmente à margem em que está. Do ponto **A**, ele traça uma perpendicular à reta **AB** e marca sobre ela um ponto **C**, distante 30 m de **A**. Em seguida, ele se desloca para **C**, olha os pontos **A** e **B** e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 45^0. Qual é a largura do rio na direção do ponto **A** ?

Resolução.

De acordo com as informações do enunciado, pode-se construir a figura:

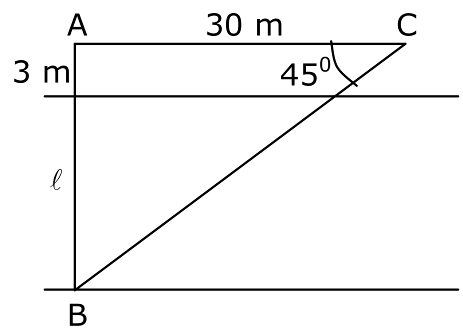


FIGURA 3

Tem-se, assim:

$$tg45^0 = \frac{\ell + 3}{30} \Rightarrow \frac{\ell + 3}{30} = 1 \Rightarrow \ell + 3 = 30 \Rightarrow \ell = 27 \text{ m}.$$

5ª. Questão - Sejam as funções $f(x) = 2^x + 2$ e $g(x) = 4^x$.

Determine para que valores de $x \in \Re$ se tem $f(x) = g(x)$ e represente graficamente.

Resolução.

Se $f(x) = g(x) \Rightarrow 2^x + 2 = 4^x \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$

Faça uma mudança de variável: $2^x = t$

Então: $t^2 - t - 2 = 0$, cujas raízes são $t_1 = 2$ e $t_2 = -1$

Voltando a variável inicial teremos: $\begin{cases} 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \\ 2^x = -1, \nexists x \in \Re \end{cases}$

Logo a solução é x=1.

Representação Gráfica: