PROVA PARA OS ALUNOS DE 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

1) Pedro e Paulo iniciam o ano de 2000 com R$ 1.000,00 cada um. Todo mês Pedro aumenta seu capital em 5% enquanto Paulo aumenta o seu em R$ 200,00. Pergunta-se

a) Depois de 1 mês quanto tem cada um?
b) E depois de 2 anos, quanto cada um vai ter?
c) Supondo que nos próximos 5 anos ambos procedam da forma como foi enunciado acima. A partir do 1º mês um deles vai ter sempre mais dinheiro que o outro? Por quê?

Use a abaixo tabela com os valores aproximados das potências de 1,05, caso necessite:

n =	23	24	25	35	36	37	47	48	49	59	60	61
$1{,}05^n =$	3,07	3,23	3,39	5,52	5,79	6,08	9,91	10,40	10,92	17,79	18,68	19,61

Resolução.

Cada mês Pedro tem seu capital multiplicado por 1,05, isto é, o capital do Pedro forma uma progressão geométrica de razão q=1,05 e cujo primeiro termo é $a_1 = 1000{,}00$.

Cada mês Paulo tem seu capital aumentado de R$ 200, isto é, o capital de Paulo forma uma progressão aritmética de razão r = 200 e cujo primeiro termo é $b_1 = 1000{,}00$

a) Depois de um ano:

Capital de Pedro: $a_2 = 1.000\times(1{,}05)^1 = 1.050{,}00$

Capital de Paulo: $b_2 = 1.000 + 1\times200 = 1.200{,}00$

b) Depois de dois anos:

Capital de Pedro: $a_{25} = 1.000\times(1{,}05)^{24} \cong 3.230{,}00$

Capital de Paulo: $b_{25} = 1.000 + 24\times200 = 5.800{,}00$

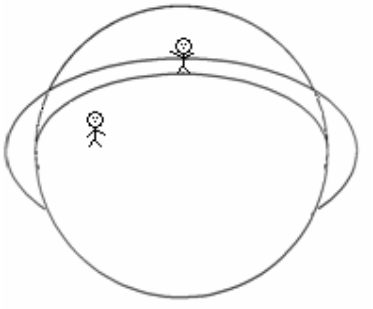
c) Depois de cinco anos:

Capital de Pedro: $a_{61} = 1.000\times(1{,}05)^{60} \cong 18.680{,}00$

Capital de Paulo: $b_{61} = 1.000 + 60\times200 = 13.000{,}00$

De acordo com (a) e (b), passado um mês e passado um ano Paulo tem mais dinheiro que Pedro. Mas passados 5 anos, Pedro tem mais dinheiro que Paulo.

2) Zigzag vive em um planeta que tem o mesmo raio da Terra e é uma esfera perfeita. Seu irmão Tiktak passou uma corda em torno do equador do planeta e depois aumentou o comprimento da corda em 10 metros, formando uma outra circunferência suspensa sobre o equador. Sabendo que a altura de Zigzag é de 1 metro, quando ele estiver em pé no equador sua cabeça vai ficar abaixo da corda? Justifique sua resposta.



Resolução: O comprimento inicial da corda era $C = 2\pi r$ metros, onde r é o raio da terra em metros.
O comprimento da corda foi aumentado em 10m. Logo o comprimento da nova circunferência passa a ser $C_1 = C + 10 = 2\pi r + 10$ metros.
Denotando o raio da circunferência nova circunferência por r_1 temos $C_1 = 2\pi r_1$, ou seja, $2\pi r+10 = 2\pi r_1$.
A nova circunferência passa a uma altura igual à diferença $r_1 - r$ sobre o equador.
Como $2\pi r+10 = 2\pi r_1$ então $10 = 2\pi r_1 - 2\pi r = 2\pi(r_1-r)$. Logo, $r_1-r = 10/(2\pi) \cong 1{,}6$ metros.
Como a altura de Zigzag é 1 metro então sua cabeça vai ficar abaixo da corda.

Observe que, apesar de 10 metros ser uma quantidade insignificante em relação ao comprimento inicial da corda, 1,6 metros também é insignificante em relação ao raio da terra.

3) Dadas as funções $f(x) = 3x - 5$ e $f_o g(x) = x^2 - 3$, determine a função g, faça um gráfico desta função e determine as raízes e o maior ou menor valores possível para g(x), caso existam.

Resolução.

$f(x) = 3x - 5$
$f_o g(x) = f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 5$
$f_o g(x) = x^2 - 3$

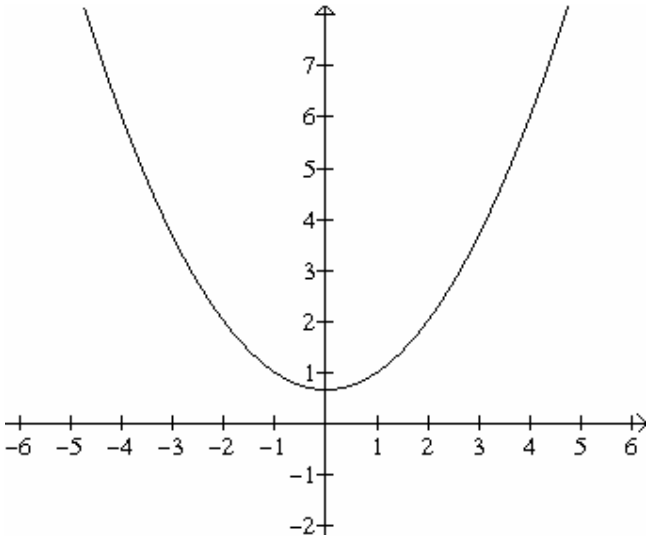
Assim, $3 \cdot g(x) - 5 = x^2 - 3$. Logo, $g(x) = x^2/3 + 2/3$.

Raízes: $x^2/3 + 2/3 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$. Logo, não existem raízes.

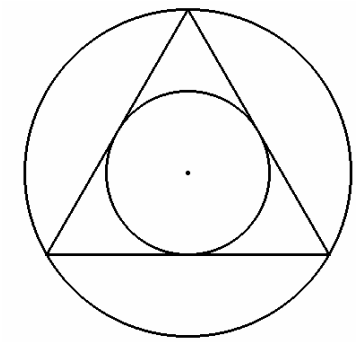
Gráfico: O gráfico de g(x) é uma parábola $g(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a = 1/3$, $b = 0$ e $c = 2/3$. Seu vértice tem coordenadas $(-b/2a, -b^2/4a + c) = (0, 2/3)$.
Tabela para o gráfico:

-4	6
-3	11/3
-2	2
-1	1
0	2/3
1	1
2	2
3	11/3
4	6

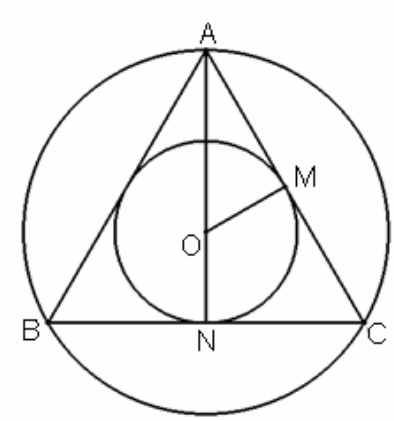
Gráfico



4) Determine a área existente entre as duas circunferências concêntricas abaixo sabendo-se que o triângulo com vértices na maior e lados tangentes à menor é eqüilátero e tem área igual a $18\sqrt{3}$ cm^2.



Resolução. Para X e Y pontos do plano vamos denotar por XY tanto o segmento XY quanto seu comprimento.



Seja O o centro das circunferências e sejam M e N pontos de tangência.

Num triângulo eqüilátero o incentro, o circuncentro e o baricentro coincidem.

Propriedade do Baricentro O: AN = 3ON ($\Leftrightarrow$ AO = 2/3·AN $\Leftrightarrow$ ON = AN/3)

Como o triângulo ABC é eqüilátero com área $18\sqrt{3}$, então $18\sqrt{3} = AB^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, AB = 6, isto é, cada lado do triângulo tem medida igual a 6 cm.

Como o triângulo ABC é eqüilátero e os pontos M e N são pontos de tangência e O é o centro de ambas as circunferências então:

a) $AN = BC\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ pois AN é altura do triângulo eqüilátero ABC

b) $OA = AN\cdot 2/3 = 3\sqrt{3}\cdot 2/3 = 2\sqrt{3}$, pois O é o baricentro do triângulo ABC

c) $OM = ON = AN/3 = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, pois O é o baricentro do triângulo ABC

Assim, a área entre as duas circunferências é dada por $\pi OA^2 - \pi OM^2 = \pi(OA^2 - OM^2) = \pi(12-3) = 9$.

5) João Torto comeu, no dia 13 de agosto, às 9 horas da noite, no bar da esquina, uma coxinha contendo 2.048 bactérias de uma determinada doença. No dia seguinte, sofrendo de um terrível desarranjo intestinal, João chegou às 8:45 horas da manhã no pronto socorro procurando ajuda para voltar ao seu estado normal. Após uma espera de 3 longas horas na fila e algumas visitas ao sanitário local, João foi finalmente atendido pelo médico, cuja consulta durou 2 minutos e meio, saindo dali com uma receita. Levou 12 minutos e meio para comprar e tomar o primeiro comprimido do remédio na própria farmácia, em vista da urgência que sentia para sanar seu desconforto.

Considerando que

1. a população da bactéria em questão dobra a cada hora,
2. cada visita ao sanitário elimina ¼ das bactérias,
3. João foi ao sanitário de hora em hora, a partir das 3 horas da madrugada do dia seguinte à contaminação,
4. cada comprimido do remédio elimina ¾ das bactérias que existem na hora em que é tomado,
5. o remédio é tomado de hora em hora.

Resolva as questões abaixo.

a) Equacione o problema, isto é, represente o problema a partir uma ou várias funções ou equações.
b) A que horas João visitará pela última vez nesse dia o sanitário, considerando que somente uma quantidade maior que 90.000 bactérias pode obrigar o hospedeiro, no caso João, a eliminar as bactérias indesejáveis.
c) Calcule a que horas João pode de tomar o último comprimido, considerando que não há mais necessidade do remédio a partir do momento em que a quantidade de bactérias não ultrapassar a 200 unidades. Nesta situação, as defesas naturais do organismo eliminarão as bactérias restantes.

Boa prova. Caso necessite visitar o sanitário converse com o fiscal da sala.

Resolução.

De acordo com o enunciado João tomou o primeiro comprimido às 12:00 horas pois
12:00 = 8:45+3:00+0:02:30+0:12:30

Nos nossos cálculos estamos considerando que João visita o sanitário antes de tomar o remédio. Caso alguém tivesse considerado o contrário, seu raciocínio também seria considerado correto.

tempo t	Horas	Quantidade de bactérias		
0	21:00	2.048		
1	22:00	4.096	=anterior*2	$2.048*2$
2	23:00	8.192	=anterior*2	$2.048*2^2$
3	00:00	16.384	=anterior*2	$2.048*2^3$
4	01:00	32.768	=anterior*2	$2.048*2^4$
5	02:00	65.536	=anterior*2	$2.048*2^5$
6	03:00		=anterior*2 - anterior*2*(1/4)	$2.048*2^5*(3/2)$
		98.304	=anterior*(3/2)	
7	04:00	147.456	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^2$
8	05:00	221.184	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^3$
9	06:00	331.776	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^4$
10	07:00	497.664	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^5$
11	08:00	746.496	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^6$
12	09:00	1.119.744	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^7$
13	10:00	1.679.616	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^8$

14	11:00	2.519.424	=anterior*(3/2)	$2.048*2^5*(3/2)^9$
15	12:00	944.784	=anterior*(3/2) - anterior*(3/2)*(3/4)= =anterior*((3/8)	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)$
16	13:00	354.294	=anterior*((3/8)	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^2$
17	14:00	132.860	=anterior*((3/8)	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^3$
18	15:00	49.822	=anterior*((3/8)	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^4$
19	16:00	18.683	=anterior*((3/8)	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5$
20	17:00	9.341	=anterior*2 – anterior*2*(3/4) = anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2$
21	18:00	4.670	= anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2^2$
22	19:00	2.335	= anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2^3$
23	20:00	1.167	= anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2^4$
24	21:00	583	= anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2^5$
25	22:00	291	= anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2^6$
26	23:00	145	= anterior/2	$2.048*2^5*(3/2)^9*(3/8)^5/2^7$

a) De acordo com a tabela podemos representar o problema pela função

$$f(t) = \begin{cases} 2048\times 2^t \quad para\ 0\le t\le 5 \\ 2048\times 2^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{(t-5)} \quad para\ 6\le t\le 14 \\ 2048\times 2^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{9}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{(t-14)} \quad para\ 15\le t\le 19 \\ 2048\times 2^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^{9}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{t-19} \quad para\ 20\le t\le 26 \end{cases}$$

ou seja, $$f(t) = \begin{cases} 2^{11+t} \quad para\ 0\le t\le 5 \\ 2^{16}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{(t-5)} \quad para\ 6\le t\le 14 \\ 2^{7}\times 3^{9}\times\left(\frac{3}{8}\right)^{(t-14)} \quad para\ 15\le t\le 19 \\ 3^{13}\times 2^{11-t} \quad para\ 20\le t\le 26 \end{cases}$$

considerando t = 0 às 21:00 horas do primeiro dia.

Podemos observar na tabela que:

b) João visitará pela última vez o sanitário às 16:00 horas pois após visitar o sanitário e tomar o remédio das 15:00 João terá 49.822 bactéria que após 1 hora terá duplicado em número, ou seja, às 16:00 horas João terá 99.644 bactérias, necessitando ir ao sanitário. Às 16:00 horas, após ir ao sanitário e tomar o remédio passa a ter 18.863 bactérias. A partir daí, consideramos que João não vai mais ao sanitário.

c) João pode de tomar o último comprimido às 22:00 horas.