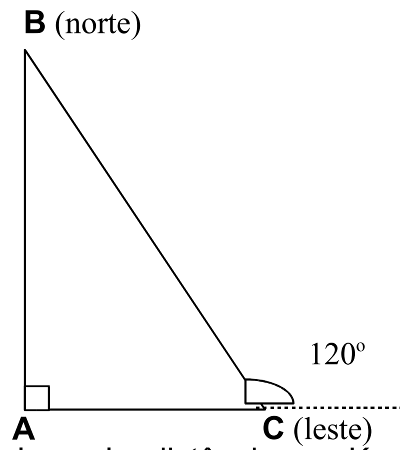
PROVA PARA OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

1ª Questão – Um pequeno avião rumaria de uma cidade **A** para uma cidade **B**, ao Norte, distante 60 Km de **A**. Por uma falha de orientação do piloto, o avião seguiu equivocadamente rumo ao leste. Ao perceber o erro, o piloto corrigiu a rota ao fazer um giro de 120º à esquerda, em um ponto **C**, de modo que seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo **ABC**, como mostra a figura a seguir:



Com base nesta figura calcule qual a distância, em Km, que o avião voou partindo de **A** até chegar a **B**.

Resolução.

Como o ângulo externo em C no triângulo ABC mede 120^0, temos que o ângulo interno $A\hat{C}E$ mede 60^0. Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo ABC temos:

$$\text{sen } 60^0 = \frac{AB}{CB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{CB} \Rightarrow CB = \frac{120}{\sqrt{3}} \Rightarrow CB = 40\sqrt{3}$$

e

$$\cos 60^0 = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{40\sqrt{3}} \Rightarrow AC = 20\sqrt{3}.$$

Assim, a distância percorrida pelo avião de A até B é dada por:

$$AC + CB = 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 60\sqrt{3}\ \text{Km}.$$

2ª Questão – Um número inteiro positivo de três algarismo termina em 5. Se este último algarismo for colocado antes dos outros dois, o novo número, também com três algarismos, assim formado, excede em 53 unidades o dobro do número original. Qual é o número inicial? Justificar a resposta.

Resolução.

Podemos denotar o número procurado por $x = cdu = 100c+10d+u$, onde c, d e u são números inteiros de 0 a 9.
Como u = 5 temos $x=100c+10d+5$.
Colocando o algarismo 5 na primeira posição, temos pelo enunciado que

$$5cd = 500+10c+d = 2x+53 = 200c+20d+10+53,$$

ou seja, $500+10c+d = 200c+20d+63$.
Assim,

$$190c + 19d = 437 \Rightarrow 19(10c + d) = 437 \Rightarrow 10c + d = 23 \Rightarrow c = 2 \text{ e } d = 3.$$

Portanto, o número procurado é $x=100c+10d+u = 200+30+5 = 235$.

3ª Questão – O número de pessoas infectadas por uma doença, em uma certa região, com relação ao tempo é dado por **N(t) = C . 4^kt^**, em que **C** é o número de pessoas infectadas no tempo **t** = 0; **k** é uma constante a ser determinada; e **t** é o tempo em anos. Considerando que existem 20.000 casos da doença confirmados nesta região e que a fórmula acima representa um programa mundial de erradicação da doença, o qual reduz o número **N** de casos em 50% ao ano, calcule:

a) o valor das constantes **C** e **k**;

b) quantos anos serão necessários para se reduzir o número de infecções a 625 casos.

Resolução.

a) Para t = 0, existem 20.000 casos da doença, logo, pela fórmula dada,

$$N(0) = C.4^{k.0} \Rightarrow 20.000 = C.1 \Rightarrow C = 20.000.$$

Para t=1 temos 10.000 casos da doença, pois esta se reduz 50% ao ano, logo

$$N(1) = C.4^{k.1} \Rightarrow 10.000 = 20.000.(2^2)^k \Rightarrow 1 = 2.2^{2k} \Rightarrow 2^0 = 2^{2k+1} \Rightarrow 2k+1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

b) Como $N(t) = 20.000.4^{(\frac{-1}{2}t)} = 20.000.2^{-t}$, considerando $N(t) = 625$, obtemos

$$625 = 20.000.2^{-t} \Rightarrow 2^t = \frac{20.000}{625} = 32 = 2^5 \Rightarrow t = 5.$$

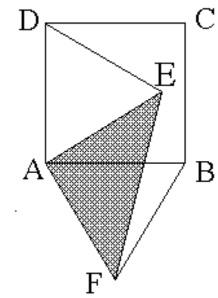
Portanto, o tempo necessário é de 5 anos.

4ª Questão – Calcule a área da região marcada, na figura plana abaixo, sabendo-se que:

a) o quadrado ABCD tem lados de 7cm;

b) triângulo ADE é eqüilátero e

c) o triângulo ABF também é eqüilátero.



Resolução:

Como AD = 7, então AE = 7, pois o triângulo ADE é eqüilátero.

Como o triângulo ABF é eqüilátero e AB = 7, então AF = 7.

Note que EÂB = 90º - 60º = 30º e que BÂF = 60º. Logo, EÂF = 90º.

Assim, o triângulo EAF é um triângulo retângulo de lados medindo 7 cm e cuja área é dada por

$$S = \frac{AExAF}{2} = \frac{7^2}{2} = 24{,}5cm^2.$$

5ª Questão – Seja uma seqüência de 10 círculos em que o primeiro tenha diâmetro de 1 dm e, para os demais círculos, cada um tenha área igual a 4 vezes a do anterior. Calcule a soma dos comprimentos das circunferências.

Resolução.

As áreas A_n dos círculos de raios r_n formam a uma PG de razão $q = 4$.
Como o diâmetro do primeiro círculo é 1 temos

$r_1 = 1/2$ e $A_1 = \pi(r_1)^2 = \pi(½)^2 = \pi/4$.

Utilizando a fórmula do termo geral de uma PG temos

$A_n = A_1 q^{n-1} = (\pi/4).4^{n-1} = 4^{n-2}\pi$.

Mas, $A_n = \pi(r_n)^2$, logo $\pi(r_n)^2 = 4^{n-2}\pi \Rightarrow (r_n)^2 = 2^{2(n-2)} \Rightarrow r_n = 2^{n-2}$.
Assim, $r_{n+1} = 2^{n-1} = 2\times2^{n-2} = 2r^n$, ou seja, os raios dos círculos formam em uma PG de razão 2. Logo, o comprimento da n-ésima circunferência é

$C_n = 2\pi\, r_n = 2\pi 2^{n-2} = \pi 2^{n-1}$.

Portanto, os comprimentos das circunferências também formam uma PG e, neste caso, a razão é $q_c = 2$ pois $C_{n+1} = \pi 2^n = 2\pi 2^{n-1} = 2C_n$.
Como $C_1 = 2\pi r_1 = 2\pi(½) = \pi$, a soma dos comprimentos das 10 circunferências é dada, em decímetros, por:

$$S_{10} = \frac{C_1(q_c^{\ 10} - 1)}{(q_c - 1)} = \frac{\pi(2^{10} - 1)}{(2 - 1)} = \pi(1024 - 1) = 1023\pi.$$