UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE BAURU
unesp

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Faculdade de Ciências

11ª ORMUB/2003

OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA

PROVA PARA OS ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

NOME: ______________________________________

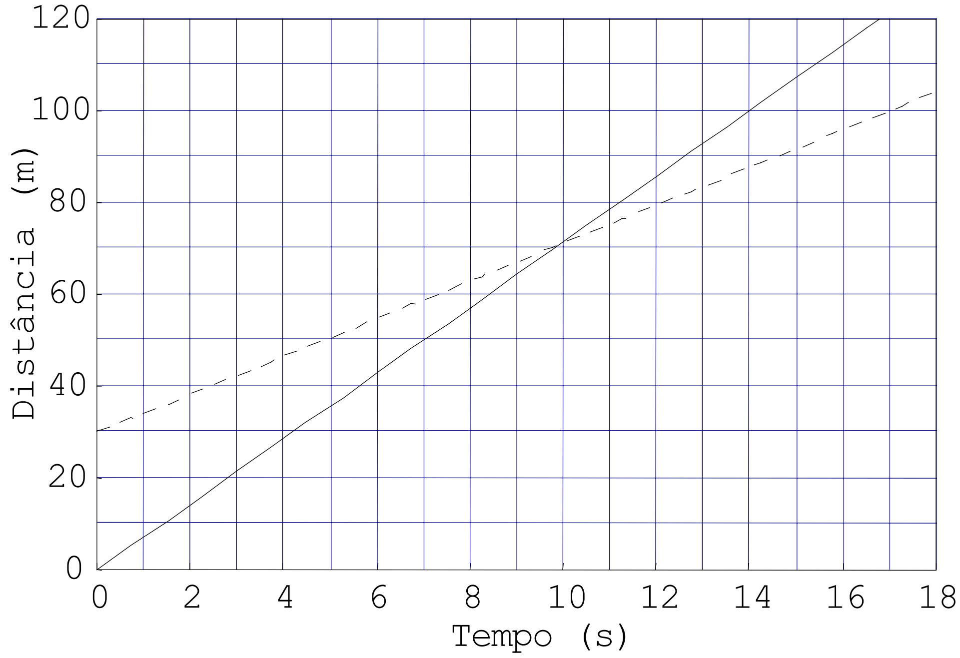
ESCOLA: ______________________________________

CIDADE: ______________________________________

INSTRUÇÕES
Este caderno contém 5 (cinco) questões). A solução de cada questão, bem como o raciocínio utilizado, devem estar na parte frontal de cada folha. O verso pode ser utilizado como rascunho.

AVALIAÇÃO	
Questão	Nota
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
Total	

1ª Questão – Pai e filho se desafiam para uma corrida de 100m. Fica estabelecido que o filho partiria 30m à frente do ponto inicial da corrida. Um gráfico bastante simplificado dessa corrida é dado a seguir:



De acordo com o gráfico, responder as questões:

a) Quem ganhou a corrida? Qual a diferença entre os tempos de chegada dos corredores?
b) A que distância do ponto inicial os corredores se encontram? Em que instante isso acontece?
c) Determinar as equações das funções afins (do primeiro grau) que definem a distância d em função do tempo t para cada corredor.

2ª Questão – Uma malharia familiar produz camisetas a um custo de R$ 2,00 por unidade e tem uma despesa fixa semanal de R$ 50,00. Se para x camisetas produzidas na semana, o preço unitário é dado, em reais, pela expressão $\left(\frac{22}{3}-\frac{x}{30}\right)$.

Pergunta-se:

a) Quantas camisetas devem ser vendidas por semana para se obter o maior lucro possível?

b) Em que condições não há ganho nem perda de capital na fabricação das camisetas?

3ª Questão – O pH de uma solução, dado em função da concentração de hidrogênio H^{+} em íons-grama por litro de solução, é definido pela seguinte expressão:

$$pH = \log_{10}\left(\frac{1}{H^{+}}\right).$$

Pede-se:

a) O pH de uma solução que tem H^{+} = $1{,}0.10^{-8}$;
b) O valor de H^{+} para uma solução que tem pH = 2;
c) Um esboço do gráfico do pH em função da concentração de hidrogênio H^{+};
d) Um esboço do gráfico da concentração de hidrogênio H^{+} em função do pH.

4ª Questão - A quantidade de certo remédio, na corrente sangüínea, diminui pela metade a cada duas horas. A cada 4 horas, administram-se doses de K miligramas, com K a ser determinado.

Pede-se:

a) Fazer um esboço do gráfico da quantidade de remédio (em mg), na corrente sanguínea, em função do tempo (em horas). Considerar as dezesseis primeiras horas após a primeira dose;

b) Justificar que o número de miligramas do remédio na corrente sanguínea, logo após a n-ésima dose é $K+\frac{1}{4}K+...+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}K$, e que esta soma é aproximadamente $\frac{4}{3}K$, para grandes valores de n;

c) Se mais de 500 miligramas do remédio na corrente sanguínea é considerado um nível perigoso, determinar a maior dose possível que pode ser administrada repetidamente por um longo período de tempo.

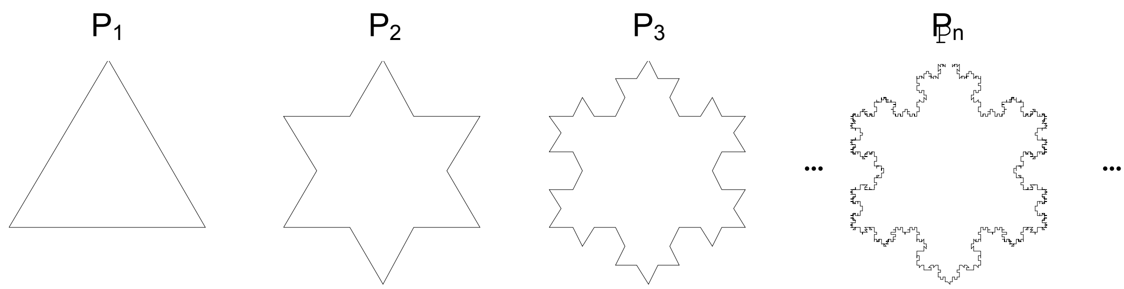
5ª Questão - Considerar a seqüência de polígonos $\{P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...\}$, conforme indicado na figura abaixo, construída da seguinte maneira:

Primeira Etapa:
• Considerar o polígono regular P_1, cuja medida de seus lados é 1 unidade de comprimento. (P_1 é um triângulo eqüilátero);

Segunda Etapa:
• Dividir cada lado de P_1 em três partes;
• No terço central de cada lado de P_1, colar um triângulo eqüilátero cujo lado mede 1/3 do lado de P_1 e apagar a base de cada triângulo colado. Forma-se, então, o polígono P_2 de lados de mesma medida;

Terceira Etapa:
• Dividir cada lado de P_2 em três partes;
• No terço central de cada lado de P_2, colar um triângulo eqüilátero cujo lado mede um terço do lado de P_2 e apagar a base de cada triângulo colado. Forma-se, então, o polígono P_3 de lados de mesma medida;

N-ésima Etapa:
• Dividir cada lado de P_{n-1} em três partes;
• No terço central de cada lado de P_{n-1}, colar um triângulo eqüilátero cujo lado mede um terço do lado de P_{n-1} e apagar a base de cada triângulo colado. Forma-se, então, um polígono P_n de lados de mesma medida;



Tendo em vista a construção acima:

a) Calcular a área A_n do polígono P_n;
b) Se o processo de construção acima é repetido infinitas vezes, obtém-se o "polígono" P_∞. Determinar a área de P_∞;
c) Determinar o perímetro do polígono P_n. Qual o perímetro de P_∞ ?