UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Campus de Bauru

MATRIZES E SUAS CERCANIAS: UM ESTUDO HISTÓRICO A PARTIR DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

TATIANE TAIS PEREIRA DA SILVA

ORIENTADORES: PROF. MS. FÁBIO DONIZETI DE OLIVEIRA
PROF. DR. ANTONIO VICENTE M. GARNICA

Relatório Final entregue à FAPESP referente às atividades desenvolvidas pela bolsista Tatiane Tais Pereira da Silva, durante o segundo semestre do ano de 2010.

BAURU (SP)
2010

RESUMO

Nesse relatório temos a intenção de apresentar as atividades realizadas durante o segundo semestre do ano de 2010 pela bolsista Tatiane Tais Pereira da Silva, além disso, por se tratar de nosso relatório final, consideramos pertinente, apresentar, também, nosso relatório de pesquisa no que diz respeito à pesquisa: "Matrizes e suas Cercanias: Um estudo histórico a partir de livros didáticos de Matemática", desenvolvida junto ao GHOEM – Grupo de História Oral e Educação Matemática – sob a orientação do Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica e co-orientação do Prof. MS. Fábio Donizeti de Oliveira. O projeto tem apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP

De acordo com as atividades que propomos em nosso cronograma inicial, durante o segundo semestre de 2010 nos dedicamos à elaboração da análise das 24 obras didáticas que fazem parte do nosso estudo.

Nesse período relemos as descrições elaboradas anteriormente e, em seguida, organizamos uma tabela, onde resumimos as principais características de cada obra e a partir dessa tabela destacamos quais as mudanças entre os livros anteriores e posteriores ao MMM.

Além das atividades da minha pesquisa, durante o ano de 2010 participei do processo de digitalização do BOLEMA – Boletim de Educação Matemática, do ciclo de Seminários Avançados: "História da Educação Matemática", participei, como aluna ouvinte, da disciplina concentrada "Tópicos Especiais – Educação Matemática: História da Educação Matemática" ministrada pela Professora Maria Laura Magalhães Gomes e pelo Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica, oferecida pelo Programa de Pós-Graduação da UNESP – Rio Claro, das reuniões do GHOEM e do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM (Salvador/BA), onde apresentei o desenvolvimento do meu trabalho. Além disso, vale ressaltar, que fui aceita para o mestrado no Programa de Pós-Graduação da UNESP – Rio Claro, com o projeto de pesquisa "Movimento da Matemática Moderna: outros olhares", que tem, além da metodologia utilizada, diversas características semelhantes ao projeto de iniciação científica que ora apresentamos.

Tatiane Tais Pereira da Silva
- bolsista -

Prof. Ms. Fábio Donizeti de Oliveira
- co-orientador -

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafioti Garnica
- orientador -

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 2007, ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática da UNESP – Bauru, fui beneficiada com a Bolsa de Apoio Acadêmico e Extensão I e, como resultado do trabalho realizado para a bolsa, desenvolvi um Tutorial para uso de Matrizes com o Software Microsoft Excel. Tal projeto, além de auxiliar na compreensão e assimilação dos conteúdos estudados na disciplina "Álgebra das Matrizes", ministrada durante o primeiro semestre do primeiro ano do curso, despertou em mim o interesse em estudar o desenvolvimento histórico de tal conteúdo.

No início de 2008, ao saber que um integrante do IC-GHOEM – Grupo de Iniciação Científica do GHOEM[1] – desenvolvia um projeto sobre a história de Logaritmos a partir da análise de Livros Didáticos de Matemática[2], propomos ao professor Vicente, coordenador do GHOEM, um projeto cujo objetivo fosse construir uma história do ensino de matrizes segundo a faceta dos manuais didáticos. Assim, durante aquele ano, iniciamos nossos estudos que nos levaram a elaborar um projeto de pesquisa, em nível de iniciação científica, com a intenção de solicitar subsídio aos órgãos financiadores para o desenvolvimento do nosso estudo. Este texto, portanto, tem a intenção de relatar os resultados de nossos esforços para compreender historicamente o conteúdo Matrizes a partir de livros didáticos de matemática, realizados durante o ano de 2010 com apoio financeiro da FAPESP.

Esta pesquisa faz parte, portanto, da linha de pesquisa do GHOEM em História da Educação Matemática a partir de Livros Didático, sendo co-orientado pelo Professor Mestre Fábio Donizeti de Oliveira, que em sua dissertação de mestrado apresenta discussões metodológicas para auxiliar a análise de manuais didáticos de Matemática.

Ao iniciar a elaboração do projeto com a orientação dos professores Vicente e Fábio, começamos a participar do IC-GHOEM, que realiza reuniões de estudo quinzenais. Tivemos a oportunidade de discutir nosso trabalho, estudar textos sobre metodologia de pesquisa, em especial, o método da história oral e textos sobre História, História da Educação e História da Educação Matemática. A participação no grupo nos possibilitou, ainda, um contato maior com alunos de pós-graduação e a participação em

[1] Grupo de História Oral e Educação Matemática (www.ghoem.com)
[2] Trabalho de Iniciação Científica desenvolvido pelo aluno Anderson Aparecido da Silva, também, sob a orientação dos professores Vicente e Fábio.

eventos de natureza científica, dos quais destacamos o CIC (Congresso de Iniciação Científica da UNESP), o EBRAPEM (Encontro Brasileiro pós-graduação em Educação Matemática), o Colóquio Brasileiro de Matemática, o EPEM (Encontro Paulista de Educação Matemática), o NEHO (Núcleo de Estudos em História Oral) e o ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), o que tem enriquecido a minha formação inicial e tem me dado base para continuar os meus estudos em Programas de Pós-Graduação.

A investigação que apresentamos nesse texto tem como objetivo principal construir um histórico do conteúdo “Matrizes” a partir da análise de relevantes obras didáticas utilizadas para o ensino no Brasil desde o final do século XVIII até o final do século XX. Para tanto, buscamos compreender, principalmente, as abordagens propostas pelos autores destes manuais buscando perceber as alterações e as permanências nos mecanismos de ensino e aprendizagem de Matemática referentes a este conteúdo.

A realização dessa pesquisa foi viabilizada por termos à nossa disposição o acervo do GHOEM, localizado numa sala cedida pela Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru, que possui cerca de 1000 títulos dentre os quais várias obras raras do século XVII ao XX (manuais nacionais e internacionais utilizados em academias militares, ensino primário, secundário, escolas normais etc.), à disposição para a realização de estudos semelhantes ao nosso.

Vale destacar, ainda, que durante o desenvolvimento dessa pesquisa pudemos perceber a importância do trabalho em grupo já que, por vezes, discutimos o andamento da pesquisa com nossos colegas e orientadores. A inserção no ambiente de pesquisa dificilmente se daria de outra forma se não pela possibilidade de pesquisa em nível de Iniciação Científica.

METODOLOGIA

2.1 Um método hermenêutico para a análise de obras didáticas

Acreditamos que o livro didático, devido à sua importância no cotidiano escolar, pode contribuir para a compreensão do processo escolar e para uma escrita da História da Educação Matemática, por isso tomamos esse componente do ambiente escolar como objeto principal da nossa análise.

Para a análise das obras didáticas adotamos, tanto quanto possível, considerando tratar-se de uma pesquisa de iniciação científica com duração de um ano, a metodologia hermenêutica proposta por Oliveira em sua dissertação, defendida em 2008, no programa de pós-graduação da UNESP – Rio Claro.

Com a intenção de construir um referencial teórico para subsidiar as análises de textos didáticos de matemática, Oliveira (2008) concebe livros didáticos como "Formas Simbólicas"[3] e, portanto, passíveis de serem submetidos a uma hermenêutica. A partir dessa compreensão, apresenta uma discussão metodológica baseada em John B. Thompson e na Hermenêutica da Profundidade de Paul Ricoeur para a análise desse tipo de material.

Dessa forma, Oliveira (2008) defende três componentes, sugeridos por Thompson (1995), à análise das Formas Simbólicas: a análise sócio-histórica, a análise formal-descritiva e a (re) interpretação.

A análise sócio-histórica visa contribuir para o estabelecimento de uma interpretação mais plausível sobre a obra. Esse momento da análise tem como objetivo reconstruir as condições sociais e históricas em que o material foi produzido e/ou apropriado. Em nossa pesquisa, como identificamos que o Movimento da Matemática Moderna é ressaltado na literatura como um marco importante para que o conteúdo Matrizes seja incorporado ao Ensino Secundário, esta etapa da análise se concentrou em estudos que nos permitissem uma maior compreensão sobre as premissas desse movimento. Tal compreensão nos permitiu perceber, posteriormente, e já num processo que Oliveira (2008) chama de (re) interpretação, as mudanças ocorridas nos textos

---

[3] Entendemos "Formas Simbólicas" como "produções humanas intencionais". De acordo com Oliveira (2008, p. 37) "[...] o livro didático, em especial o livro didático de matemática, pode ser considerado como forma simbólica" e, portanto, é passível de diversas interpretações.

didáticos, apreendidas através da análise formal dos livros selecionados, à época em que o Movimento da Matemática Moderna se evidencia.

A análise formal-descritiva, consistiu, então, na análise das características estruturais internas da obra. Essa análise é corporificada, em nosso trabalho, nas descrições dos livros analisados, as quais apresentaremos no capítulo seguinte. Para elaborar as descrições estivemos atentos à seqüência em que os capítulos sobre determinantes e/ou matrizes são apresentados, à metodologia utilizada pelo autor, ao nível de ensino para o qual o livro foi produzido etc. Ao final de cada descrição procuramos, também, lançar um olhar mais geral sobre a obra ressaltando, dos aspectos que percebemos, aqueles que mais diretamente poderiam contribuir para as compreensões que buscávamos tecer.

Buscamos, por fim, tecer relações entre os dois aspectos anteriores, relacionando o contexto histórico e os elementos internos da obra de forma a construir um significado a ela. É nesse momento que as relações entre a produção e as formas de produção, as influências do contexto sócio-histórico que interferiram no produto final, o livro didático, foram construídas. Vale ressaltar, porém, que tais compreensões, assim como afirma Oliveira (2008), não foram construídas de forma estanque. As idas e vindas entre os contextos de produção/apropriação (aqui centrados no Movimento da Matemática Moderna) e os livros didáticos nos fizeram, aos poucos, constituir um significado, no que diz respeito ao conteúdo Matrizes, para este período da História da Educação Matemática Brasileira.

2.2 Compreensões iniciais para uma abordagem aos Livros Didáticos

Como vários pesquisadores afirmam que o Movimento da Matemática Moderna (MMM) marca a gênese do estudo de “Matrizes” no currículo escolar, conforme podemos perceber, por exemplo, em Soares (2001), orientamos nossos estudos para a compreensão deste movimento com o intuito de perceber o vínculo deste conteúdo com os objetivos do MMM.

> Ainda na Conferência de Royamont, Dieudonné expôs algumas sugestões dos tópicos que na sua opinião deveriam constar em um currículo de Matemática livre do “peso morto da geometria pura” e que seriam valiosos para a continuidade dos estudos matemáticos superiores. Entre as sugestões estão o estudo de matrizes e determinantes, funções de uma variável, construção de gráficos de funções e de uma curva dada parametricamente (...). (SOARES, 2001, p. 57)

Enquanto buscávamos esta aproximação, descobrimos, através de outros trabalhos desenvolvidos no IC-GHOEM, que o professor José Adelino Serrasqueiro já abordava o tema "Determinantes", hoje bastante relacionado com o estudo de Matrizes, em livros didáticos de sua autoria editados no final do século XIX. Tal descoberta nos levou a procurar em nosso acervo os manuais didáticos anteriores ao MMM que abordam o tópico "Matrizes" e/ou "Determinantes". Levantamos, então, quatorze obras anteriores e oito posteriores ao MMM, algumas delas com várias edições, publicadas entre 1887 e 1991, sendo o **Cours D' Algèbre Superieure** de Charles de Comberousse a mais antiga delas.

Diante destas novas informações, passou a nos inquietar quais mudanças teriam sido introduzidas pelo Movimento da Matemática Moderna no que se refere ao conteúdo Matrizes de forma que vários autores considerem este movimento um marco indelével quanto à escolarização deste conteúdo. Assim, para incluir em nossos estudos sobre os livros produzidos antes do MMM que abordam "Determinantes", decidimos formular nossa proposta de pesquisa de modo a fazer uma reconstituição histórica sobre o ensino de matrizes no Brasil a partir de livros didáticos utilizados para o ensino de matemática no país desde meados do século XIX até o final do século XX, visando, de modo especial, a perceber possíveis reflexos das mudanças introduzidas pelo Movimento da Matemática Moderna nestes livros didáticos. A escolha deste período foi baseada no levantamento realizado no acervo do GHOEM dos livros que abordam o tema de nossa pesquisa. Desta forma, estudamos a abordagem aos conteúdos "Determinantes" e/ou "Matrizes" presentes nas seguintes obras:

1. ***Cours D' Algèbre Superieure* –** Charles de Comberousse – 1887
2. ***Álgebra Elementar*** – José Adelino Serrasqueiro – 9ª edição (1906), 16ª Edição (1929) e 17ª edição (1936)
3. ***Exercícios de Álgebra* –** Cecil Thiré – 8ª Edição (1927) e 32ª Edição (sem data)
4. ***Álgebra Elementar: Equações e problemas algébricos*** – Algacyr Munhoz Maeder – 1ª edição (1928)
5. ***Análise Algébrica* –** Alberto Nunes Serrão – 2ª Edição (1945)
6. ***Curso de Matemática*** – Algacyr Munhoz Maeder – 2º Livro – Ciclo Colegial (1947)
7. ***Álgebra: curso Superior* –** Irmão Isidoro Dumont – 1947

8. ***Curso de Matemática 2ª série*** – Ciclo Colegial – Algacyr Munhoz Maeder - 8ª Edição (1958)
9. ***Lições de Álgebra e Análise*** – Bento de Jesus Caraça – Volume I – 2ª Edição (1945) e 4ª Edição (1959)
10. ***Matemática: Segundo Ano Colegial*** **–** Ary Quintella **–** 3º Edição (1959)
11. ***Curso de Matemática para os cursos de segundo grau*** – Manoel Jairo Bezerra – 4ª Edição (1960) e 33ª Edição (1976).
12. ***O Cálculo de Matrizes*** **–** Harry Farrer – 1960
13. ***Matemática Colegial: Parte do Mestre*** – Irmãos Maristas - 2º Volume – 1965
14. ***Álgebra Linear*** – L.H. Jacy Monteiro – 1º Volume – 3ª Edição (1965)
15. ***Matemática Curso Colegial*** – School Mathematcs Study Group – Volume III – 1966
16. ***Biblioteca Moderna de Matematica*** **–** [1968]
17. ***Curso Colegial Moderno: Matematica*** – Scipione di Pierroneto; Luiz Mauro Rocha; Ruy Madsen Barborsa – 2ª Serie Colegial – 1968
18. ***Moderno Curso de Matemática*** **–** Manoel Jairo Bezerra – 1968
19. ***Introdução a Álgebra das Matrizes*** **–** SMSG – 1969
20. ***Abecedário de Álgebra*** **–** Darcy Leal de Menezes – 8ª Edição – 1971
21. ***Matemática Aplicada: segundo grau*** - Fernando Trotta, Luis Mario Imenes e Jose Jakubovic – 2º volume (1979) e 3º volume (1980).
22. ***Fundamentos de Matemática Elementar*** – Vol. 4 – Gelson Iezzi e Samuel Hazzan **–** 7ª Edição (1985).
23. ***Matemática*** **–** Fernando Trotta **–** Volume 5 - 1988
24. ***Matemática*** - Vol. 2 - Ewaldo Bianchini e Herval Paccola – 1ª Edição (1991).

Após estudos preliminares sobre as premissas e objetivos do MMM começamos a elaborar as descrições dos manuais que compõem nossa pesquisa. Para estruturar nosso estudo, dividimos as obras em dois grupos: anteriores e posteriores ao MMM, conforme sua publicação tenha sido anterior ou posterior à obra “Matemática” desenvolvida pelo SMSG[4] em 1966.

---

[4] *School Mathematics Study Group*. Apresentamos, no capítulo final de nosso trabalho, um texto onde estudamos esse grupo com maior profundidade.

Para facilitar a compreensão das obras e a percepção das modificações que ocorreram no transcorrer do tempo quanto à abordagem do conteúdo, iniciamos nosso estudo com a descrição dos livros de acordo com a sua ordem cronológica de publicação, priorizando as publicadas em português. Tais descrições foram estruturadas de forma a evidenciar, de um modo geral, a seqüência utilizada pelos autores para apresentar os conteúdos, o que era ensinado, com qual objetivo (ou, mais precisamente, qual objetivo poderíamos assumir ser o da obra) e como o assunto era abordado.

Encontramos dificuldades para descrever os livros destinados ao Ensino Superior e o livro em francês, pois não tínhamos estudado alguns dos conteúdos abordados. Além disso, tivemos algumas dificuldades durante o processo de descrição, principalmente com relação à gramática e ortografia da época em que a obra foi produzida.

Após finalizar as descrições das 24 obras, retornamos o estudo desse material, destacando numa tabela (apresentada após as descrições) as características de cada obra. Apoiados nessa tabela elaboramos nossas compreensões.

Para apresentar nossa análise consideramos o livro “Matemática” publicado em 1966 pelo SMSG um representante do Movimento da Matemática Moderna e, a partir dessa obra, apresentamos nossas compreensões sobre o movimento e seus reflexos no ensino de matrizes e determinantes.

DESCRIÇÕES

Livro: Cours D' Algèbre Supérieure

Autor: Charles de Comberousse

Edição: 2ª

Ano de publicação: 1887

Editora: Gauthier – Villars et Fils.

Nível de Ensino: Candidatos à escola politécnica, a cursos superiores (Incluindo aqueles voltados para às Ciências Matemáticas)

O manual "Cours D' Algèbre Supériere", desenvolvido para candidatos à escola politécnica e cursos superiores, teve sua 2ª edição publicada em 1887.

A obra é dividida em cinco livros conforme os temas: Complemento de álgebra elementar, Combinações – Binômios – Potências - Raízes e crescimento de um polinômio, Noções sobre séries, Continuidade – Função exponencial – Logaritmos, Estudo das Derivadas e Diferenciais.

Cada livro é subdividido em capítulos. O estudo sobre os determinantes é dividido em dois capítulos, o quarto e o quinto do primeiro livro, intitulados "Primeiros princípios da Teoria dos Determinantes" e "Multiplicação de determinantes", respectivamente.

O quarto capítulo é dividido em seis tópicos. No primeiro, "Definições preliminares", o autor apresenta o conceito de permutação, define inversão e classe de uma permutação.

O tópico seguinte, "Sobre os determinantes", é iniciado com a seguinte afirmação: "C'est en cherchant à résoudre d'une manière générale les systèmes d'équations linéaires qu'on a été conduit à l'étude des déterminants"[5](p. 29). Ainda neste tópico são apresentados os conceitos de "linha", "coluna" e "índices" de um determinante, sendo o índice inferior o que indica a linha e o índice superior o que marca a coluna à qual o elemento pertence. Em seguida, é definido "termo de um

[5] A tentativa de generalizar a resolução dos sistemas de equações lineares conduziu ao estudo dos determinantes.

determinante”, sendo este positivo ou negativo, conforme o número de permutações de seus elementos.

Neste tópico, são apresentadas também as definições de “termo principal” e “ordem” de um determinante, além de suas duas notações: os elementos limitados por um par de traços verticais ou utilizando o símbolo $\sum$ seguido pelo termo principal do determinante.

Prosseguindo o estudo, o autor aborda o conceito de “determinantes menores”.

O quarto tópico é dedicado ao estudo das propriedades gerais dos determinantes. São apresentadas e demonstradas 12 propriedades, sendo a propriedade seguinte denominada “Teorema Fundamental”:

> Tout déterminant est une fonction linéaire et homogène des éléments d’une même ligne ou d’un même colonne, et, par suite, on peut toujours l’ ordonner suivant les éléments de cette ligne ou de cette colonne.[6] (p.36)

Em seguida, no tópico “Lei de formação de um determinante”, é apresentada a Regra de Sarrus, para desenvolver um determinante.

No último tópico desse capítulo, o autor utiliza-se do método apresentado anteriormente para calcular o valor de um determinante, apresentando dois exemplos numéricos e quatro exemplos genéricos.

O quinto capítulo é composto por apenas um tópico, em que a partir de dois determinantes genéricos P e Q de ordem n, o autor introduz o conceito de produto de dois determinantes.

Para nossa pesquisa, vale ressaltar que, assim como o autor destaca, a teoria dos determinantes é estudada com o objetivo de aplicá-la na resolução de sistemas lineares.

Além disso, destacamos que as propriedades apresentadas são demonstradas, sendo essas demonstrações apresentadas numa linguagem natural.

Quanto aos exercícios, esses são apresentados ao final do manual, divididos conforme os temas abordados em cada livro. Para o primeiro livro são propostos 70 exercícios, sendo 17 deles sobre Determinantes.

---

[6] Todo determinante é uma função linear e homogênea dos elementos de uma mesma linha ou de uma mesma coluna e, por isso, pode-se sempre ordená-lo de acordo com os elementos de tal linha ou tal coluna.

Livro: Tratado de Álgebra Elementar
Autor: José Adelino Serrasqueiro

Edição: 9ª, 16ª e 17ª

Ano de publicação: 1906, 1929 e 1936.

Editora: Livraria Central de J. Diogo Pires – Sucessoras

Nível de Ensino: Segundo Ano do Ensino Secundário

O livro "**Tratado de Álgebra Elementar"**, escrito pelo professor de matemática e bacharel em filosofia José Adelino Serrasqueiro, foi publicado em Coimbra, sendo a 9ª, 16ª e 17ª edição, as quais iremos analisar, produzidas nos anos de 1906, 1929 e 1936, respectivamente. O manual, desenvolvido para o segundo ano do Ensino Secundário, aborda os conteúdos Cálculo Algébrico, Equações e Desigualdades do primeiro grau, Equações e Desigualdades do segundo grau, Logaritmos e Determinantes, cada qual em um dos cinco livros em que o manual é dividido. O conteúdo "Determinantes" é abordado no quinto e último livro, intitulado "Determinações. Sua applicação á resolução e discussão das equações de primeiro grau" que contêm 27 páginas, sendo quinze dedicadas ao primeiro capítulo, dez para o segundo e duas para exercícios. O título deste livro nos indica uma possível intenção do autor ao abordar o tópico de determinantes: para a resolução de equações do primeiro grau. Esta conjectura é reforçada pela divisão feita neste quinto livro, abordando no Capítulo I a "Theoria Elementar dos Determinantes", o que nos faz supor que tal teoria é abordada apenas em seus aspectos elementares. Para Discutir esta teoria, as 15 páginas utilizadas pelo autor nesse capítulo são divididas em 4 parágrafos[1].

No primeiro destes parágrafos, intitulado "Definições e princípios geraes", o autor apresenta nas proposições[2] de 369 a 377 a definição de permutação na qual se baseia para definir e discutir a formação de um determinante. Apresenta suas notações e

---

[1] O autor não utiliza o termo "parágrafo", mas o sinal § e o texto referente a cada uma destas partes não são parágrafos no sentido usualmente utilizado para a produção de textos "literários". O sentido, aqui, é mais próximo ao utilizado pelos textos "jurídicos", representando um trecho que pode contar até mais que uma página, no qual um tópico ou propriedade é tratado.

[2] Os parágrafos são subdivido em proposições enumeradas, o autor utiliza essas proposições para apresenta as definições, propriedades, teoremas, exemplos e exercícios do capítulo.

o modo de identificar o grau de um determinante, discutindo, por fim, alguns corolários da lei de formação apresentada.

Segundo o autor, uma permutação forma um desarranjo ou uma inversão quando os seus elementos não estão em ordem alfabética ou quando o índice do primeiro elemento é maior que o índice do segundo.

As permutações são classificadas conforme o número de inversões, sendo que as que contêm um número par de inversões são chamados de primeira classe e as que contêm um número ímpar, de segunda classe.

Com base no conceito de permutações, Serrasqueiro define determinantes da seguinte maneira:

> Supponhamos n^2 quantidades ou elementos, dispostos em n linhas horizontaes e em n columnas verticaes:
>
> $$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n \end{matrix}$$
>
> Cada letra é affectada de um indice: o indice designa a linha e a letra designa a columna a que o elemento pertence. Assim d_3 é um elemento da terceira linha e da quarta columna. Posto isto: Determinante de n^2 objectos é a somma algebrica tomados n a n, de modo que cada producto contenha mais do que um elemento de cada linha ou columna e não contenha mais do que um; e de modo que cada producto tenha o signal + ou -, conforme as permutações das letras e dos índices forem da mesma ou differente classe. (Serrasqueiro, 1906, p. 357).

No primeiro parágrafo o autor também apresenta as diferentes notações de um determinante. A representação adotada por ele é a que os elementos são letras diferentes seguidas de um índice, sendo o índice o indicativo da linha e a letra da coluna à qual o elemento pertence.

Para desenvolver um determinante do segundo grau o autor utiliza a lei de formação, entretanto para desenvolver um determinante de terceiro grau, mais facilmente do que pela lei de formação utiliza a regra de Sarrus, onde:

> À direita da terceira coluna escrevem-se as duas primeiras multiplicam-se os elementos dispostos três a três em diagonal e tomam o seu sinal os produtos

dos elementos das diagonais que descem da esquerda para a direita, e com sinal contrário os produtos das outras diagonais. (p. 358).

"Propriedades geraes dos determinantes" é o título do segundo parágrafo, onde o autor apresenta e demonstra as propriedades dos determinantes demarcando as proposições 378 a 385. As propriedades abordadas são:

Um determinante não se altera, quando se trocam as linhas em columnas e as columnas em linhas.
Quando, num determinante, se trocam duas linhas ou duas columnas, o valor do determinante muda de signal, isto é, fica multiplicado por –1.
Quando, num determinante, se faz occupar o primeiro logar a um termo qualquer, da columna p e da linha q por exemplo, o determinante fica multiplicado por $(-1)^{p+q}$.
Um determinante é nullo, quando tem duas linhas ou columnas idênticas.
Multiplicando ou dividindo todos os elementos de uma linha ou de uma columna pelo mesmo numero, o valor do determinante fica multiplicado ou dividido por esse numero.
Um determinante não se altera, quando todos os elementos de uma linha ou de uma columna se multiplicam ou dividem pelo mesmo numero, contanto que se divida ou multiplique o determinante pelo mesmo numero.
Um determinante muda de signal, quando se trocam os signaes a todos os elementos de uma linha ou de uma columna.
Um determinante transforma-se noutro, em que os elementos de uma linha ou de uma columna sejam substituídos pela unidade. (p.359 – 363)

O terceiro parágrafo é dedicado ao estudo dos Determinantes Menores. Nele, o autor define e apresenta as propriedades deste conteúdo enumerando as proposições de 386 a 391.

Conforme Serrasqueiro, ao suprimir uma linha (ou mais) e o mesmo número de colunas de um determinante, obtemos um Determinante Menor do determinante inicialmente dado. O determinante menor é do grau n-r, onde r é o número de linhas e colunas que foram suprimidas e n o grau do determinante dado.

Nas proposições 392 a 394 que compõem o quarto parágrafo, cujo título é: "Decomposição dos determinantes de elementos polynomicos. Propriedades dos determinantes relativas á somma ou subtracção de linhas ou columnas", são apresentados teoremas e corolários sobre a decomposição dos determinantes. A primeira proposição nos diz que se as linhas ou colunas de um determinante são polinômios, podemos decompô-lo na soma de outros determinantes simples. As proposições seguintes são conseqüências de tal propriedade dos determinantes.

Durante o primeiro capítulo além das demonstrações de todas as propriedades, teoremas e corolários estudados o autor apresenta alguns exemplos numéricos dos mesmos.

O segundo capítulo, intitulado **“Applicação dos determinantes á resolução e discussão de um systema de equações do primeiro grau”**, utiliza-se, como o próprio título nos revela, do conteúdo apresentado no capítulo anterior para resolver e discutir sistemas de equações. São dedicadas dez páginas para tal estudo, sendo o capítulo divido em dois parágrafos.

O primeiro parágrafo, que tem como título: “Resolução de um systema de equações do primeiro grau”, contém as proposições 395 e 396. Na proposição 395 o autor apresenta e demonstra a regra de Cramer e a proposição 396 possui três exemplos numéricos onde Serrasqueiro utiliza tal regra para solucionar os sistemas.

No segundo parágrafo, intitulado “Discussão do systema de n equações do primeiro grau a n incógnitas” temos as proposições 397 a 401 em que, a partir do valor do determinante obtido da matriz dos coeficientes, são feitas discussões sobre as possíveis soluções para o sistema.

Quando o valor do determinante não é nulo, o sistema é possível e determinando. Quando o determinante é nulo e nenhum dos numeradores das fórmulas gerais for nulo o sistema é impossível, porém se algum dos numeradores for nulo o sistema é possível indeterminado.

O livro é finalizado com exercícios de todo conteúdo abordado, sendo os exercícios 652 ao 685 sobre determinantes e os exercícios 686 ao 693 sobre solução de equações. Os enunciados são claros e sucintos, contendo apenas a atividade proposta e a regra (citada pelo número da proposição ou nome que é apresentada no texto) que deve ser utilizada.

São poucas as modificações notadas entre as edições analisadas (9ª 16ª e 17ª), mantendo, inclusive, o conteúdo abordado em cada página. Os exemplos e exercícios continuam os mesmos, bem como o conteúdo de um modo geral. Há, entretanto, modificações no tamanho e tipo de fonte, que ficam mais claras, além da correção de alguns erros de digitação.

Podemos destacar que o autor aborda o conteúdo de “Determinantes” somente em seus aspectos elementares, apresentando apenas os conceitos e propriedades relevantes para a solução de sistemas de equações do primeiro grau, o que nos leva a acreditar que tal conteúdo é apresentado apenas com este objetivo. Vale-nos ressaltar que o autor não utiliza o conceito nem a notação de matrizes para definir determinantes.

Livro: Exercícios de Álgebra

Autor: Cecil Thiré

Edição: 8ª

Ano de publicação: 1927

Editora: Livraria, Papelaria e Litho – Typographia

Nível de Ensino: Ensino Secundário

A obra "**Exercícios de Álgebra**" foi produzida com o objetivo de trabalhar com exercícios de todos os conteúdos estudados no Curso de Álgebra. Para tanto, Thiré pretendia apresentar exercícios e problemas resolvidos e, posteriormente, propor uma lista que deveria ser resolvida pelos estudantes. Entretanto, segundo o autor, o livro ficaria volumoso o que aumentaria seu custo e o tornaria menos acessível aos alunos. Assim, Thiré resolveu modificar sua idéia inicial apresentando nesse manual apenas os exercícios propostos e suas respostas no final do livro. Publicada em 1927, a 8ª edição da obra possui 210 páginas com exercícios dos seguintes tópicos: Valor numérico. Redução de termos semelhantes; Adição; Subtração; Divisão; Divisão por x ± a; Decomposição em fatores; Maximo Divisor Comum. Mínimo Múltiplo Comum; Frações; Indeterminações Aparentes; Equações do 1º grau a uma incógnita; Problemas de 1º grau a uma incógnita; Sistemas de equações do 1º grau; Desigualdades do 1º grau; Analise Indeterminada do 1º grau; Calculo de radicais. Expoentes fracionários Imaginários do 2º grau; Equações do Segundo Grau; Propriedades das raízes de equações do 2º grau; Trinômio do 2º grau. Desigualdades; Problemas de 2º grau a ma incógnita; Equações Irracionais; Equações Biquadradas; Sistemas de equações que se reduzem ao 2º grau; Problemas do 2º grau a duas e mais incógnitas; Progressões Aritméticas; Progressões Geométricas; Logaritmos; Equações Exponenciais; Juros Compostos. Anuidades; Analise Combinatória; Binômio de Newton; Frações Contínuas e Determinantes.

Como se evidencia no próprio título da obra, não é desenvolvida teoria sobre qualquer dos tópicos abordados, mas somente são propostos exercícios sobre estes conteúdos. Os exercícios sobre determinantes são os últimos apresentados no manual. Em três páginas a autora propõe 30 exercícios, nos quais são trabalhadas as propriedades e a definição de determinantes e o conceito e sinal de permutação, sendo a maior parte exercícios numéricos e fáceis de serem resolvidos. Destacamos que, apesar de apresentar exercícios sobre determinantes, a autora não propõe exercícios sobre sistemas lineares.

Livro: Álgebra Elementar – Equações e problemas algébricos

Autor: Algacyr Munhoz Maeder

Edição: 1ª

Ano de publicação: 1928

Editora: Typ. João Haupt & Cia.

Nível de Ensino: Ginásio

A obra "**Álgebra Elementar – Equações e problemas algébricos**", segunda parte, escrita pelo professor Catedrático da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras e da Escola de Engenharia do Paraná e Lente do Colégio Estadual do Paraná, Algacyr Munhoz Maeder, teve sua 1ª edição, a qual utilizaremos nesse estudo, publicada em 1928. Segundo Arnaldo J. Beckert, autor do prefácio do livro, o manual facilita o estudo da Álgebra nos ginásios, pois contém grande parte dos pontos exigidos pelos programas oficiais e, além disso, aborda a teoria dos determinantes e sua aplicação à resolução de sistemas lineares, conteúdo que, até então, era pouco abordado nos livros desse gênero.

No prefácio Beckert defende a importância do manual, ressaltando suas vantagens pedagógicas. Após o prefácio é apresentado um texto de Introdução que fala sobre a história das ciências, suas divisões dando ênfase à Matemática.

O autor inicia o capítulo sobre de determinantes, com a seguinte definição:

> Consideremos os elementos a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' constituindo 3 coleções, dispostas da maneira seguinte:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

> Com esses elementos podemos formar grupos ternários, onde cada letra e sinal ocorram apenas uma vez, obtemos os seguintes grupos:
>
> ab’c’’, ac’b’’, ba’c’’, bc’a’’, ca’b’’, cb’a’’.
>
> Ao somar todos esses grupos, obtemos um **determinante**. (p. 100)

Os grupos que não apresentarem ou tiverem um número par de inversões terá sinal positivo e os que apresentarem um número ímpar de inversões terá sinal negativo.

Um grupo apresenta inversão quando um elemento de ordem superior antecede um de ordem inferior ou, se tratando de letras, quando não estão em ordem alfabética.

Segundo a representação de Cauchy, os elementos do determinante são encerrados em um quadro limitado por duas linhas verticais, além de ser simbolicamente representado pela letra Δ (delta). Portanto, um determinante que tem os elementos a, b, a’, b’, pode ser representado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

O grau do determinante acima é dois, pois cada grupo tem dois fatores. Para desenvolvê-lo multiplicam-se os elementos em cruz e subtrai os produtos parciais. Aplicando esse processo, temos:

ab’-ba’

Para o desenvolvimento de determinantes do terceiro grau, Sarrus, eminente professor da Universidade de Strassburgo, elaborou uma regra de ampla aplicação.

Regra de Sarrus: Considere o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}$$

Debaixo das três fileiras repetiremos a primeira e segunda, obtendo:

$a'\ \ b'\ \ c'$

$$
\begin{array}{l}
a''\ b''\ c'' \\
a'''\ b'''\ c''' \\
a'\ \ b'\ \ c' \\
a''\ b''\ c''
\end{array}
$$

Traçando diagonais, da esquerda para a direita formaremos os produtos:

$$a'b''c''',\ a''b'''c',\ a'''b'c''.$$

Analogamente, traçando diagonais da direita para a esquerda, teremos:

$$c'b''a''',\ c''b'''a',\ c'''b'a''.$$

Os três primeiros grupos terão sinal positivo e os outros três, sinal negativo, teremos, então, que o desenvolvimento determinante é o polinômio:

$$a'b''c'' + a''b'''c' + a'''b'c''' - c'b''a''' - c''b'''a' - c'''b'a''$$

Em seguida o autor utiliza o conceito de determinantes para resolver sistemas do primeiro grau.

As fórmulas que resolvem sistemas lineares têm como denominador o determinante do sistema, sendo seus elementos os coeficientes das incógnitas e, para numerador, o mesmo determinante, porém substitui os coeficientes da incógnita pelo termo independente.

Para nossa pesquisa vale ressaltar que o autor aborda superficialmente o conteúdo de determinantes. Utilizando apenas quatro páginas para o estudo, o autor exclui temas importantes como propriedades e decomposição dos determinantes. Além disso, o livro possui poucos exemplos numéricos, não possui exercícios e nenhuma fórmula utilizada é matematicamente demonstrada, o que nos revela que a intenção do autor ao apresentar a Teoria dos Determinantes é aplicá-la à resolução e discussão de sistemas lineares.

Além disso, destacamos que apesar de não apresentar o termo, o autor utiliza o conceito de permutação para definir determinantes.

Livro: Análise Algébrica
Autor: Alberto Nunes Serrão

Edição: 2ª

Ano de publicação: 1945

Editora: Edição da Livraria do Globo

Nível de Ensino: Curso Científico, Escolas Militares, Candidatos ao Vestibular.

Alberto Nunes Serrão, livre docente da Cadeira de Cálculo Infinitésimo, Engenheiro Civil e Geógrafo pela Escola Nacional de Engenharia e Professor de Matemática do Colégio Pedro II escreveu o manual "**Análise Algébrica**" para alunos do curso científico, das escolas militares, candidatos ao vestibular das escolas de engenharia, química, arquitetura e filosofia.

Publicada em 1945, a 2ª edição da obra contém, além dos tópicos: Análise Combinatória; Binômio de Newton; Potências de polinômios; Determinantes; Sistemas de equações lineares. Regra de Cramer. Teorema de Rouché; Frações Contínuas; Números Complexos; Noções sobre conjuntos lineares. Sucessões; Funções de uma variável; Limites; Continuidade; Séries numéricas; Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; Teoremas fundamentais de Cálculo Diferencial; Desenvolvimento em série. Fórmulas de Taylor e Maclaurin; Formas Indeterminadas. Regra de L'Hôpital; Variação das funções. Máximos e mínimos; Divisão de polinômios e suas aplicações; Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de polinômios; Teorema Fundamental da Álgebra. Propriedade das equações; Relações entre os coeficientes e as raízes. Raízes nulas e Infinitas. Cálculo de raízes comuns e das raízes múltiplas; Funções Simétricas; Eliminação. Resultantes; Transformações clássicas de uma equação algébrica; Separação de raízes reais e Aproximação de raízes, aproximadamente 723 exercícios com respostas, que abordam todos os conteúdos estudados.

No prefácio o autor apresenta algumas considerações quanto aos novos exercícios e aos conteúdos que sofreram algumas alterações em relação à edição anterior, entretanto salienta que nesta edição o plano geral do trabalho ficou inalterado em relação à primeira edição do mesmo manual. Quanto ao conteúdo de Determinantes nada foi mencionado pelo autor.

O capítulo sobre Determinantes composto de 37 páginas é subdivido em 27 tópicos, que abordam teoremas, propriedades, definições e exemplos.

No primeiro tópico o autor apresenta o seguinte texto sobre a história dos Determinantes:

> A teoria dos determinantes constitui um dos algoritmos mais importantes da Matemática, apresentando numerosas e variadas aplicações. Teve sua origem no estudo dos sistemas de equações lineares com G. W. Leibniz (1646 – 1716) e G. Cramer (1704 – 1752). (p. 57)

Em seguida o autor apresenta a condição para que um sistema linear possua soluções diferentes de zero, ou seja, para que um sistema homogêneo do tipo:

$$\begin{cases} a_1\ x + b_1\ y = 0 \\ a_2 x + b_2\ y = 0 \end{cases}$$

Admita solução única, diferente de x = y = 0 a expressão $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ tem que ser verdadeira. O autor utiliza o mesmo processo para expressar a condição para que um sistema de três incógnitas possua solução, a qual ele denomina **determinante** dos coeficientes das incógnitas. Após apresentar essas noções, o autor generaliza a definição de um determinante relativo à matriz quadrada de ordem n (quadro que contém n linhas e n colunas) como a soma algébrica dos termos que obtemos a partir do produto da diagonal principal e permutando os índices dos elementos de todas as maneiras possíveis.

No quarto tópico são apresentadas as notações de um determinante. No tópico seguinte o autor apresenta um exemplo do desenvolvimento de um determinante de segunda ordem e um de terceira ordem, além da Regra de Sarrus e da Regra Octógono Estrelado.

Quando um determinante for aplicado à resolução de sistemas lineares, Serrão recomenda que os seus elementos sejam representados com duplo índice, ou seja:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Em seguida o autor define matriz como o conjunto dos n^2 elementos dispostos em n linhas e n colunas utilizando a notação com duplo índice e apresenta uma nova definição para determinantes:

> Chama-se determinante de n^2 elementos dispostos em um quadro que contém n linhas e n colunas ao polinômio que se obtém, fazendo a soma algébrica de todos os produtos de n fatores contendo um único elemento de cada linha e de cada coluna e atribuindo aos diferentes produtos o sinal mais ou menos, conforme as permutações dos primeiros e segundos índices sejam da mesma paridade ou de paridade diversa. (p. 64).

O décimo tópico é dedicado ao estudo das principais propriedades dos determinantes, o autor apresenta as sete propriedades abaixo, suas conseqüências, algumas observações e suas demonstrações:

> O valor de um determinante não se altera, quando se trocam as linhas pelas colunas correspondentes, considerando a ordem relativa dos elementos.
> Quando em um determinante se trocam entre si duas filas paralelas, o valor do determinante muda de sinal.
> Todo determinante que tem duas filas idênticas, é nulo.
> Multiplicando todos os elementos de uma mesma fila por um número arbitrário k, o valor do determinante fica multiplicado pelo mesmo número.
> Quando se dividem por um mesmo número k todos os elementos de uma mesma fila de um determinante, ele fica divido por esse número.
> Todo determinante pode sempre reduzir-se a outro, possuindo uma fila de elementos igual à unidade.
> Um determinante em que são nulos todos os elementos situados num mesmo lado da diagonal principal, reduz-se ao seu termo principal. (p.66 – 70)

Nos tópicos 11, 12, 13, 14 e 15 o autor apresenta a definição de determinantes menores, menor complementar, complemento algébrico, método para determinar o número de menores de um determinante e define adjuntos de um determinante, respectivamente, sendo este último dividido em três partes nas quais são apresentados os teoremas resultantes da definição de adjuntos e alguns exemplos dos mesmos.

Em seguida o autor apresenta as conseqüências e algumas aplicações dos teoremas apresentados anteriormente:

> Um determinante no qual todos os elementos de uma dada fila, exceto um, são nulos, reduz-se ao produto desse elemento não nulo pelo adjunto correspondente;
> Quando os elementos de uma determinada linha (coluna) são formados por somas d um mesmo número m de elementos, o determinante considerado decompõe-se em uma soma de m determinantes, obtidos, associando as diferentes parcelas da linha (coluna) composta com as demais linhas (colunas) simples;
> O valor de um determinante não se altera, quando somamos aos elementos de uma mesma linha (coluna) os de várias outras linhas (colunas) previamente multiplicados por números arbitrários. (p.77).

O autor define produto de dois determinantes de mesma ordem no tópico 19 e no tópico 20 mostra que para calcular o produto de dois determinantes de ordem diferentes basta elevar adequadamente a ordem do determinante de menor ordem. Além das definições, o autor apresenta exemplos e demonstrações do conceito estudado.

Para finalizar a primeira parte do capítulo o autor apresenta o Teorema de Laplace: um determinante pode ser desenvolvido segundo os elementos de uma determinada linha ou coluna.

Na segunda parte, intitulada "Determinantes Notáveis", o autor utiliza quatro tópicos (entre o 24 e o 27) para definir e apresentar exemplos dos seguintes Determinantes:

- Determinante de Vandermonde;
- Determinante adjunto;
- Determinante recíproco;
- Determinante simétrico.

O autor finaliza o capítulo com 40 exercícios referentes ao capítulo sobre Determinante. Todos os exercícios são seguidos de suas respostas e em alguns deles há, inclusive, alguns comentários feitos pelo autor. Os exercícios que pedem provas ou demonstrações não contêm respostas.

Destacamos que inicialmente o autor apresenta, a partir da condição para que um sistema possua solução, a definição de um determinante de segunda e terceira ordem para, então, apresentar uma definição geral de determinantes. Além disso, vale ressaltar que o autor apresenta duas definições para matriz e determinante, segundo a notação adotada para os seus elementos (letras diferentes seguidas de um índice ou letras iguais com duplo índice). Quando a teoria dos determinantes for aplicada à solução de sistemas o autor recomenda o emprego da notação com duplo índice, sendo esta a notação adotada por ele entendemos que o conteúdo determinantes é abordado com o objetivo de aplicá-lo à sistemas lineares. Tal entendimento é reforçado pelo fato de, diferentemente dos outros autores, o conteúdo Determinantes ser introduzido por sua aplicação na verificação da existência de uma solução para um sistema de equações.

Livro: Lições de Álgebra e Análise

Autor: Bento de Jesus Caraça

Edição: 2ª; 4ª

Ano de publicação: 1945; 1959

Editora: Tipografia Matemática, LDA.

Nível de Ensino: Ensino Superior

O manual ”Lições de Álgebra e Análise” escrito pelo professor Bento de Jesus Caraça foi desenvolvido com base nas suas aulas ministradas no Instituto Superior de Ciências Econômicas e Financeiras, sendo a 2ª e 4ª edições, as quais dispomos em nosso acervo, publicadas, respectivamente, nos anos de 1945 e 1959.

A obra é dividida em duas partes. A primeira, intitulada “Números”, aborda, entre o capítulo I e IX, os tópicos: Números Naturais; Números Racionais; Números Relativos; Os conjuntos (I) ($R^{\pm}$) e (P); Números Reais; Números Complexos. Fundamentos da teoria e Números Complexos. Representação geométrica. Na segunda parte, intitulada “Algoritmos de Simetria”, são temas de estudo os conteúdos: Análise Combinatória. Substituições; Teoria dos Determinantes; Álgebra das Matrizes; Característica. Equações Lineares; Matrizes Especiais. Transformação e Determinantes Especiais.

O décimo primeiro capítulo, dedicado ao estudo dos Determinantes, é composto por 15 páginas, sendo essas divididas em 10 “parágrafos”, onde o autor aborda os seguintes temas: história do conteúdo; definições; determinantes de 2ª e 3ª ordem; primeiras propriedades; menores; desenvolvimento pelos menores; propriedades resultantes do desenvolvimento pelos menores; elevação e abaixamento de ordem; produto de Determinantes. Ao final do capítulo o autor apresenta algumas indicações bibliográficas. Caraça retorna o estudo sobre Determinantes no capítulo XV do mesmo manual, onde são apresentadas as definições e propriedades de alguns Determinantes Especiais.

No parágrafo dedicado à história do conteúdo o autor apresenta o seguinte texto:

> A origem da teoria dos determinantes remonta ao século XVII. G. W. Leibniz (1646 – 1716) na Alemanha e Seki Shinsuke Kowa (1642-1708) no Japão, estudando, na mesma época, problemas semelhantes da teoria das equações lineares tiveram necessidade de considerar certas expressões definidas à custa dos coeficientes das incógnitas,

> expressões essas a que mais tarde, segundo K. F. Gauus (1777-1855), se havia de chamar determinantes.
> No século XVIII foram eles objecto de aturado estudo, sobretudo por parte de G. Cramer (1704-1752), E. Bézout (1730-1783), P. S. Laplace (1749-1827), A. T. Vandermonde (1935-1796).
> No século XIX, a sua teoria consolidou-se definitivamente, depois dos trabalhos sistemáticos de A. L. Cauchy (1789-1857) e K. G. Jacobi (1804-1851). (Caraça, 1959, p.225)

O capítulo seguinte: "Álgebra das Matrizes", contém 28 páginas divididas em 16 parágrafos, que abordam os temas: Definição de matriz; Formas lineares. Dependência e Independência linear; Sistemas de equações lineares. Substituições lineares; Primeiras definições; Igualdade; Adição matricial; Produto matricial (matrizes quadradas); Álgebra das matrizes escalares; Multiplicação duma matriz por um número; O problema da comutatividade; Produto matricial (matrizes retangulares); Submatrizes. Multiplicação por blocos; Matriz Inversa; Potenciação e Produto de substituições lineares.

O autor inicia o capítulo com a seguinte definição de matrizes retangulares: "Chama-se matriz rectangular desses m*n números, ditos elementos da matriz, ao conjunto ordenado deles, dispostos em m linhas e n colunas". (p.260).

Prosseguindo o estudo, para definir forma linear, o autor apresenta a definição de variável: "Dá-se o nome de variável ao símbolo representativo dos elementos dum conjunto qualquer de números" (p.262). Chamamos, então, de forma linear nas n variáveis x_1, x_2,..., x_n à expressão analítica: $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, onde $\alpha_1, \alpha_{2,\cdots,} \alpha_n$ são os coeficientes da forma.

Em seguida o autor apresenta alguns conceitos sobre sistemas de equações lineares e substituições lineares. Exemplos:

a) Equação linear: $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$
b) Substituindo x por $\frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$ e y por $\frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ podemos representar a equação anterior de forma mais simples: $X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$. Esse processo é denominado substituição linear.

O quarto parágrafo é dividido em duas partes. Na parte A, intitulada "Matrizes", são apresentadas algumas definições referentes às matrizes:

- Matriz identidade;
- Matriz diagonal;
- Matriz escalar;
- Determinante associado;
- Matriz singular e não-singular.

Na parte B, “Substituições lineares”, o autor apresenta alguns conceitos sobre o tema, dentre eles:

- Módulo da substituição linear (determinante associado à matriz A);
- Quando a matriz de uma substituição linear é diagonal, dizemos que a substituição linear é uma multiplicação;
- Quando a matriz é escalar dizemos que a multiplicação é similar.

Em seguida, nos parágrafos 5, 6 e 7, o autor define igualdade, adição e produto entre duas matrizes:

1. Duas matrizes A e B são iguais, A = B, quando:

$((a_{rs})) = ((b_{rs})) \leftarrow a_{rs} = b_{rs}$, r=1,..., m e s=1,..., n; onde $((a_{rs}))$ e $((b_{rs}))$ representam, respectivamente, as matrizes A e B.

Como conseqüência da definição, temos que o conceito de igualdade de matrizes possui as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

2. A matriz C = $((c_{rs}))$ é a matriz soma das matrizes A e B se $c_{rs} = a_{rs} + b_{rs}$. Conseqüências da definição de soma de matrizes:

- O conjunto das matrizes de ordem n é fechado em relação à adição;
- A adição possui as propriedades: unicidade, associativa e comutativa;
- A matriz nula é elemento identidade em relação à adição;
- Existe uma matriz tal que: $A + A^t = \overline{O}$
- O conjunto das matrizes é um grupo abeliano em relação à adição.

3. Denominamos produto de duas matrizes A e B de ordem n a matriz C, onde: $c_{rs} = \sum_k a_{rk} b_{ks} \; r, s = 1, 2, \cdots, n$. O produto entre a matriz A e B é representado por: A.B

O produto de matrizes possui as seguintes propriedades:

- O conjunto de matrizes é fechado em relação à multiplicação;
- Unicidade;
- Associativa;
- Distributiva em relação à adição;
- O elemento identidade é a matriz identidade;
- D(A.B) = D(A).D(B); onde D é o determinante da matriz.

No oitavo parágrafo são apresentadas algumas propriedades das matrizes escalares, ou seja, considerando as duas matrizes escalares:

$$S_k = \begin{Vmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{Vmatrix} \qquad S_l = \begin{Vmatrix} l & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & l \end{Vmatrix}$$

Temos que:

1. $S_k + S_l = S_{k+l}$
2. $S_k . S_l = S_{k.l}$

O autor afirmar, então, que o conjunto de matrizes escalares é um anel e, portanto, possuem as seguintes propriedades:

> O anel das matrizes S_k não tem divisores de zero e, se o corpo $\Re$ for comutativo, é-o também.
> (...) tem elemento inverso.
> (...) é um corpo que é comutativo ou não conforme o for o corpo de $\Re$.
> O corpo $\Re$ e o corpo dos S_k definidas com elementos de $\Re$ são isomorfos. (p. 273 – 274)

Após definir o produto entre duas matrizes quadradas o autor apresenta, no nono parágrafo, a multiplicação de uma matriz por um número:

Sejam k e a_{rs} números pertencentes a um corpo $\Re$, temos:

$$k.((a_{rs})) = ((k.a_{rs}))$$

Tal operação possui as seguintes propriedades:

- Unicidade.
- Se k=0 ou A= ((0)) então k*A = ((0)), como o corpo $\Re$ não admite divisores de zero, de k*A = ((0)) podemos concluir que k=0 ou A = ((0)).
- Se l pertence a $\Re$ então:

$$(k+l).A = k.A + l.A \quad e \quad k.(l.A) = (k.l).A$$

Finalizando o nono parágrafo, Caraça define combinação linear entre matrizes: a matriz B é combinação linear da matriz A se podemos representar B da seguinte maneira:

$$B = \sum_{i=1}^{n} k_i * A_i$$

O décimo parágrafo, intitulado "O problema da comutatividade", trata dos casos particulares onde a propriedade comutativa é válida para o produto entre duas matrizes, sendo esses:

1. A* ((0)) = ((0)) *A = ((0))
2. A*E = E*A = A; (onde E é a matriz identidade)
3. $S_k * S_l = S_l * S_k$

Em seguida, o autor apresenta o seguinte Teorema da comutação:

> Seja X = ((x_{rs})), r, s = 1, 2,..., n uma matriz qualquer definida num corpo comutativo $\Re$ e seja A outra matriz definida no mesmo corpo. É condição necessária e suficiente para que a matriz A seja permutável com todas as X que A seja escalar. (p. 276)

No parágrafo seguinte o autor generaliza a definição apresentada para o produto de matrizes quadradas para o produto de matrizes retangulares, entretanto, destaca que a operação (A.B) só é possível quando o número de linhas de A for igual ao número de colunas de B e apresenta, por fim, a representação de um sistema de equações lineares em termos de produto matricial.

Em seguida, Caraça apresenta o conceito de submatrizes, muito utilizada e importante, segundo o autor, para resolver problemas da multiplicação entre matrizes. Sejam A e B matrizes multiplicáveis, basta fazer uma subdivisão qualquer das linhas e colunas de A em submatrizes ou blocos e uma subdivisão análoga nas colunas e linhas de B e o produto A.B pode obter-se pela lei de multiplicação aplicada à subdivisão em blocos.

No parágrafo 13 o autor define matriz adjunta e, em seguida, apresenta definição de matriz inversa.

Se a matriz A é não singular, chama-se matriz inversa A^I de A a matriz de elemento geral $b_{rs} = \frac{A_{sr}}{D(A)}$, ou seja:

$$A^I = \left(\left(\frac{A_{sr}}{D(A)} \right) \right), \quad D(A) \neq 0$$

Propriedades:

- $A^I = \frac{1}{D(A)}.A^A$, onde A^A é a matriz adjunta;
- $A.A^I = A^I.A = E$;
- As matrizes não singulares formam um grupo, em geral não abeliano, em relação à multiplicação;
- $(A.B.\cdots.K.L)^I = L^I.K^I.\cdots.B^I.A^I$
- $D(A^I) = \frac{1}{D(A)}$

Dando continuidade ao estudo, Caraça apresenta a definição de Potenciação de uma matriz, ou seja, considerando uma matriz A e um número natural n, temos que A^n é o produto de n fatores iguais a A.

Propriedades:

- Unicidade
- $A^m .A^n = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = A^{m.\,n}$
- $(A.B)^n = A.(B.A)^{n-1}.B$
- Se A e B são permutáveis: $(A.B)^n = A^n .B^n$
- $(A^I)^n = (A^n)^I$

Finalizando o capítulo sobre Matrizes, o autor apresenta o conceito e as propriedades sobre o Produto de substituições lineares, destaca algumas obras que abordam a Teoria das Matrizes (tais como: Determinants and matrices (1939), The Theory of Matrices (1933), The Theory of Determinants, Matrices and Invariants (1929), entre outros) e propõe, por fim, oito exercícios sobre os tópicos estudados.

Entretanto, o estudo sobre matrizes não é finalizado, tendo em vista que no capítulo XIV o autor apresenta algumas Matrizes Especiais (considerando agora a possibilidade de seus elementos serem números complexos), dentre elas:

- Matriz Transposta (matriz A' que obtemos trocando ordenadamente as linhas com as colunas da matriz A);
- Matriz Simétrica e Hemi-Simétrica, (A' = A e A' = -A, respectivamente);
- Matriz Conjugada (matriz Ā obtida através da substituição dos elementos de A, $a_{rs} = \alpha_{rs} + i\beta_{rs}$, pelo seu conjugado $\bar{a}_{rs} = \alpha_{rs} - i\beta_{rs}$);
- Matriz Associada (representada por A* é a conjugada da transposta da matriz A, ou seja, $A^* = \bar{A}^t$);
- Matriz de Hermite (representada pela letra H é a matriz que é igual à sua associada);
- Matriz Unitária (a matriz U é unitária, quando sua inversa for igual à sua associada: $U^{-1} = U^*$);
- Matriz Ortogonal (uma matriz é ortogonal quando é unitária e real);
- Normas Matriciais (denominamos normas matriciais as duas matrizes A*.A e A.A*);

- Matriz Normal (uma matriz é normal quando suas duas normas matriciais, apresentadas no item anterior, são iguais).

Dando continuidade ao estudo, o autor apresenta as operações de adição, multiplicação e inversão aplicadas às matrizes definidas anteriormente, ressaltando as especificidades dessas operações com números complexos. Apresenta, em seguida, um estudo sobre Transformação e Semelhança.

Conforme podemos verificar no parágrafo abaixo, Caraça aborda a teoria das matrizes com o objetivo de aplicá-la à Teoria de equações lineares e às substituições lineares:

> O estudo prévio da teoria das matrizes permitirá portanto não só obter propriedades da teoria das equações lineares e da das substituições lineares como ainda por em evidência as suas propriedades comuns. Obter-se-á assim simultaneamente uma economia de trabalho e pensamento e uma unificação estrutural das duas teorias. (p.265).

O capitulo sobre "Matrizes" é finalizado com oito exercícios sobre os tópicos estudados.

Ressaltamos que na 2ª edição o autor utiliza o símbolo ¿ para indicar o início de uma pergunta. Vale ressaltar, também, que o autor adota diferentes notações para representar uma matriz inversa, no mesmo livro, no capítulo XII (Álgebra das Matrizes) a notação utilizada é A^{I} e no capítulo XIV (Matrizes Especiais) A^{-1}.

Não foram notadas grandes diferenças entre as duas edições analisadas. A apresentação e a ordenação dos tópicos não foram alteradas, mantendo, inclusive, o conteúdo abordado em cada página, até mesmo os exercícios propostos continuam os mesmos.

Esta obra, publicada em 1959, é estruturada com a abordagem a determinantes precedendo à teoria das matrizes. Tais conteúdos demandaram 63 páginas enquanto que para o tópico posterior, equações lineares, foram utilizadas 51. Caraça dá destaque a Matrizes e Determinantes ao concluir sua obra com um estudo sobre casos especiais destes conteúdos.

Cabe destacar, por fim, que este autor é o único dentre os estudados neste nosso trabalho que trata da possibilidade dos elementos das matrizes serem números complexos. Tal estudo parece estar vinculado ao realizado na parte inicial da obra onde o autor tratada de questões sobre os conjuntos numéricos.

Livro: Curso de Matemática

Autor: Algacyr Munhoz Maeder

Edição: não consta.

Ano de publicação: 1947

Editora: Edições Melhoramentos

Nível de Ensino: Segundo ano do Curso Clássico e Científico

O manual "**Curso de Matemática**", escrito pelo professor Algacyr Munhoz Maeder e publicado em 1947, aborda os conteúdos previstos pelo programa oficial do Ensino Secundário posto em vigor pela Reforma Capanema em 1942. Desenvolvido para a segunda série do Curso Clássico e Científico, os tópicos trabalhados são: Progressões Aritméticas; Progressões Geométricas; Noção de função exponencial e de sua função inversa; Teoria dos Logaritmos; Resolução de algumas equações exponenciais; Noções sobre análise combinatória; Binômio de Newton; Teoria dos Determinantes; Aplicação dos determinantes aos sistemas lineares; Noções sobre frações contínuas; Noções sobre geração e classificação das superfícies; Estudo do cilindro e do cone; Estudo da esfera; Vetores; Projeções; Generalização das noções de arco e de ângulo; Funções circulares ou trigonométricas; Redução ao primeiro quadrante; Relações entre as funções circulares de um mesmo arco; Transformações Trigonométricas; Uso das tábuas Trigonométricas; Equações Trigonométricas; Resolução de triângulos retângulos; Resolução de triângulos obliquângulos e Aplicações imediatas à topografia.

O capítulo VIII, destinado ao estudo dos Determinantes, possui 24 páginas, sendo dividido em três tópicos, com 32 proposições (entre a 106 e a 138), que aborda todo o conteúdo.

O primeiro tópico, intitulado "Teoria dos Determinantes", trata inicialmente do conceito de permutações e inversões. Em seguida, Maeder define matrizes como um "quadrado constituído pelo conjunto m*n elementos, dispostos em m linhas horizontais e n linhas verticais" (p.101). Para representar os elementos de uma matriz, o autor adotou a notação onde os elementos são indicados por uma única letra seguida de dois índices um superior (indicando a coluna) e um inferior (indicando a linha).

Após definir matriz quadrada na proposição 112, o autor define determinante, na proposição 113, como “a soma algébrica dos produtos que se obtêm efectuando todas as permutações dos índices superiores do termo principal” [...] (p.102). Após essa definição, o autor apresenta o método para calcular um determinante de segunda e terceira ordem e a Regra de Sarrus, finalizando a primeira parte com um exemplo onde aplica tal regra.

Intitulado “Propriedades dos Determinantes”, o segundo tópico é o momento onde o autor apresenta e demonstra as propriedades dos determinantes, além de definir menores de um determinante, menor complementar, complemento algébrico e apresentar o Teorema de Laplace e suas conseqüências.

Em seguida o autor apresenta um método para diminuir a ordem de um determinante:

> Reduzem-se à unidade os elementos de uma linha e depois a zero esses elementos, com excepção de um deles; em seguida forma-se o produto do elemento não nulo pelo respectivo complemento algébrico. (p.115).

A segunda parte é finalizada com a definição e um exemplo de produto de determinantes, o qual é definido a partir da multiplicação de duas matrizes.

No terceiro e último tópico, intitulado “Determinantes Particulares”, o autor define e apresenta exemplos dos seguintes determinantes:

- Determinante Simétrico (os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais);
- Determinante Hemissimétrico (os elementos da diagonal principal são iguais a zero e os elementos simétricos opostos);
- Determinante de Vandermonde (determinante formado com as potências sucessivas de zero a n-1 de n números).

O capítulo é finalizado com uma lista de 20 exercícios envolvendo todas as propriedades e definições estudadas.

No capítulo seguinte, como o título “Aplicação dos determinantes aos sistemas de equações lineares” nos revela, o autor utiliza-se do conteúdo apresentado no capítulo anterior para resolver e discutir sistemas lineares. Para tanto o autor apresenta a Regra de Cramer e Teorema de Rouché.

O autor aborda diversos conteúdos da Teoria dos Determinantes, dentre eles destacamos o produto de determinantes, o qual é definido a partir do produto de duas matrizes.

Livro: Álgebra

Autor: Irmão Isidoro Dumont

Edição: não consta.

Ano de publicação: 1947

Editora: Paulo de Azevedo Ltda

Nível de Ensino: Ciclo Colegial e admissão às Escolas Superiores.

O Irmão Isidoro Dumont, licenciado em Matemática, iniciou sua carreira em educação no ano de 1902, porém no mesmo ano decidiu dedicar-se à realização do projeto de instalação de uma filial brasileira da FTD[1], tornando-se o principal propulsor da editora no Brasil, através da qual publicou diversos livros de álgebra, aritmética, geometria e trigonometria.

O livro “Álgebra” faz parte da Coleção de Livros Didáticos da FTD, publicado em 1947. Desenvolvido para o ciclo Colegial e para a admissão às Escolas Superiores, aborda os seguintes conteúdos: Cálculo Algébrico; Equações do 1º e 2º Grau; Análise, combinatória – Binômio e Aplicações determinatórias; Limite – Sucessões – Séries; Progressões – Logaritmos Juros Compostos – Anuidades; Derivadas e funções; Teoria das Equações Algébricas, tais conteúdos definem as “Unidades” nas quais a obra é divida, cada uma delas subdividas em capítulos. O estudo de determinantes encontra-se no capítulo II da Unidade V – Análise, Combinatória – Binômio Aplicações

[1] Editora Frère Théophane Durand, inaugurada no Brasil em 1902, na cidade do Rio de Janeiro. A editora publicou diversos livros para as escolas católicas, normais e preparatórias.

determinatórias. Para este estudo são utilizadas 22 páginas, divididas em quatro parágrafos[2], esses divididos em proposições.

No primeiro parágrafo, intitulado “Definições e princípios gerais” Dumont enumera as proposições 442 a 451 para apresentar um pequeno texto sobre a utilização e importância da teoria dos determinantes para a geometria analítica e para trabalhar com os seguintes conceitos e definições: permutações e inversões, processo prático para verificar o número de inversões e a classe de uma permutação, definição de Determinantes, métodos para encontrar a ordem e para desenvolver um determinante e a Regra de Sarrus, além de apresentar alguns teoremas e corolários.

O método prático apresentado para encontrar o número de inversões de um grupo, se baseia em fazer todas as combinações possíveis dos elementos desse grupo, por exemplo:

Sejam os números:

1 2 3 4 5 6 7

elementos de uma permutação principal. Permutando esses elementos, obtemos:

5 3 2 7 4 6 1

Fazemos um quadro das combinações dos 7 algarismos, dois a dois. Combinando os cada elemento com os elementos seguintes:

53	**32**	27	**74**	46	**61**
52	37	24	**76**	**41**	
57	34	26	**71**		
54	36	**21**			
56	**31**				
51					

Feitas as combinações dos elementos, o autor nos faz perceber que, dentre elas, 12 são o que ele caracteriza como inversões, ou seja, quando o primeiro algarismo é maior que o segundo. Como o número de inversões é par a permutação é considerada de primeira ordem, ou seja, positiva.

Considerando um quadro com n^2 elementos dispostos em n linhas e n colunas como o apresentado abaixo, o autor define:

---

[2] Assim como no livro do Serrasqueiro, o autor utiliza o sinal § para dividir o texto em trechos referentes a um item do assunto abordado.

> Chama-se determinante destes n^2 números, a soma algébrica de todos os produtos que se podem efetuar, tomando-se em cada linha e em cada coluna como fator um elemento e um só. Cada um destes produtos é um termo do determinante. Cada termo deve ser precedido do sinal + ou do sinal -, conforme a classe da permutação apresentada pelos elementos do termo (...). (p. 369)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & n_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}$$

O índice, que acompanha a letra, representa a linha do elemento e a letra, pela sua ordem alfabética, indica a coluna à qual o elemento pertence.

As letras acompanhadas de seus índices são os elementos do determinante e o quadro dos elementos é a **matriz**.

O termo formado pelos elementos da diagonal que desce da esquerda para a direita é denominado termo principal do determinante. No exemplo anterior temos que o termo principal é: $a_1b_2c_3...n_n$.

Além de representar um determinante colocando o quadro de seus elementos, ou matriz, entre dois traços verticais, podemos representá-lo através do símbolo de somatório:

$$\sum \pm a_1 b_2 c_3$$

Para desenvolvermos um determinante permutamos as letras, sem mexer nos índices, de todas as maneiras possíveis e a cada termo damos o sinal + ou – conforme a ordem da permutação. A soma algébrica desses termos será o valor do determinante.

Entretanto para determinantes de 3ª ordem podemos utilizar a Regra de Sarrus, onde à direita da 3ª coluna, copiamos as duas primeiras colunas e multiplicamos 3 a 3 os elementos que, assim dispostos, formam as seis diagonais. Conserva-se o sinal das 3 diagonais que descem da esquerda para a direita e invertemos o sinal das outras.

Concluindo o primeiro parágrafo é apresentada a resolução de dois exemplos aplicando-se a regra de Sarrus.

O segundo parágrafo é dedicado ao estudo das propriedades dos determinantes, o autor utiliza as proposições 452 a 459 para enunciar e demonstrar as propriedades:

> Um determinante não se altera quando se permuta uma linha com a coluna de mesma ordem.
> Num determinante, trocando, uma pela outra, duas linhas ou duas colunas, o determinante muda de sinal.
> Um determinante é nulo quando tem duas linhas ou duas colunas idênticas.
> Um determinante pode sempre ser desenvolvido segundo os elementos de uma linha ou de uma coluna.
> Multiplicando-se ou dividindo-se por um mesmo número todos os elementos de uma mesma linha ou de uma mesma coluna de um determinante, ele é multiplicado ou dividido por este número.
> Um determinante não se altera quando se multiplica ou se divide cada elemento de uma linha ou de uma coluna por uma mesma quantidade, contanto que, fora dos traços verticais, se divida ou s multiplique o determinante por esta quantidade. (p.372 – 375)

Intitulado “Determinantes menores” no terceiro parágrafo o autor enuncia, nas proposições 460 a 466, a definição, propriedades e conseqüências de tal tópico.

Um determinante menor é obtido pela supressão em um determinante qualquer, de uma de suas linhas e uma de suas colunas. Sua representação, quando seus elementos são expressos por letras diferentes seguida de um só índice, é feita através da letra, em maiúscula, da coluna suprimida acompanhada pelo índice da linha eliminada. Por exemplo, C_4 é o determinante menor que obtemos ao eliminar a coluna c e a 4ª linha.

O autor apresenta neste parágrafo vários teoremas, dentre eles o atribuído a Laplace: Um determinante pode ser obtido multiplicando cada elemento de uma linha ou de uma coluna com o determinante menor correspondente, tendo sinal + ou – conforme o menor correspondente for par ou ímpar.

Ordenando em relação aos elementos da 1ªlinha, obtemos:

$$\Delta = a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1+...+n_1N_1$$

Em seguida são apresentadas algumas conseqüências do Teorema de Laplace:

- Podemos calcular um determinante desenvolvendo-o sucessivamente.
- Ao multiplicarmos os elementos de uma linha (coluna) pelos determinantes menores correspondentes aos elementos de outra linha ou coluna, obtêm-se um determinante nulo.

- Se os elementos de uma linha ou coluna de um determinante são polinômios compostos de p termos, o determinante proposto é a soma algébrica d p determinantes de elementos simples.
- Não alteramos o determinante quando somamos a uma linha (coluna) os elementos de outra linha multiplicados por uma constante.
- Para calcularmos um determinante, podemos através de somas e subtrações sucessivas reduzir a zero todos os elementos de uma linha exceto um; o determinante reduz-se a um menor; aplicando o mesmo processo até chegarmos a um determinante de 2ª ordem.

O capítulo é concluído com um estudo sobre equações lineares, onde o autor utiliza os conceitos anteriormente apresentados para solucionar sistemas lineares, pois, segundo Dumont, “a teoria de determinantes fornece um meio simples e elegante de discutir e resolver um sistema”. (p. 387).

O livro é finalizado com exercícios dos conteúdos apresentados. São 45 exercícios de determinantes que abordam todos os temas estudados e 30 exercícios nos quais o autor sugere o uso de determinantes para solucionar equações lineares.

Livro: Curso de Matemática

Autor: Algacyr Munhoz Maeder

Edição: 8ª

Ano de publicação: 1958

Editora: Edições Melhoramentos

Nível de Ensino: Segundo ano do Ciclo Colegial

O livro Curso de Matemática, escrito pelo professor Algacyr Munhoz Maeder, aborda os conteúdos da 2ª série do “Ciclo Colegial”: Análise Combinatória simples; Binômio de Newton; Determinantes, Sistemas Lineares; Noções sobre vetores, projeções, arcos e ângulos, linhas e relações trigonométricas; Transformações Trigonométricas em geral, equações trigonométricas simples e Resolução trigonométrica de triângulos, sendo a 8ª edição publicada em 1958.

Logo no início do livro, o autor apresenta o Plano de Desenvolvimento do Programa Mínimo para a 2ª série do Ciclo Colegial. Em tal programa consta na parte de Determinantes os seguintes tópicos: Determinantes e matrizes quadradas, propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió.

O terceiro capítulo, composto por 23 páginas, foi destinado ao estudo dos Determinantes, subdivido em 29 tópicos, entre o 42 e 70.

O autor inicia o capítulo com um texto onde apresenta alguns fatos históricos sobre os determinantes. Em seguida define matriz, matriz quadrada, determinantes, apresenta as observações quanto ao número de termos de um determinante, desenvolve um determinante de segunda e um de terceira ordem e finaliza a primeira parte do capítulo com a Regra de Sarrus com um exemplo de sua aplicação.

A segunda parte do capítulo intitulada “Propriedades dos Determinantes”, contém os tópicos 51 ao 55 nos quais o autor enuncia e demonstra as seguintes propriedades dos determinantes:

> Um determinante não se altera quando se trocam ordenadamente as filas pelas colunas.
> Se todos os elementos de uma linha são nulos, o determinante é nulo.
> Multiplicando-se ou dividindo-se todos os elementos de uma linha por um número, o determinante fica multiplicado ou dividido por esse número.
> Trocando-se entre si duas linhas paralelas de um determinante, este muda de sinal.
> O determinante que tem duas linhas formadas de elementos correspondentes iguais é nulo.
> O determinante que tem duas linhas formadas de elementos correspondentes proporcionais é nulo. (p. 39 – 40)

Em seguida apresenta um exercício numérico em que pede para reduzir todos os elementos da primeira fila a um, a partir das propriedades anteriormente apresentadas.

Dando continuidade ao estudo o autor define menores de um determinante, menor complementar, complemento algébrico, apresenta o Teorema de Laplace e as conseqüências de tal teorema, que são apresentadas como corolários. Em seguida apresenta o método para abaixar a ordem de um determinante e a regra de Chió, seguidos por exemplos.

Maeder define o produto de determinantes a partir do produto de duas matrizes de mesma ordem:

> Dadas duas matrizes de ordem n, chama-se produto dessas duas matrizes a matriz de mesma ordem que se obtém formando todos os produtos dos elementos das filas da primeira pelas segundas. (p. 50).

O capítulo é finalizado com o estudo de dois determinantes especiais, o determinante simétrico e o determinante de Vandermonde.

Os exercícios sobre determinantes são bastante claros, semelhantes aos exemplos dados no transcorrer do texto ou são apenas aplicações das propriedades estudadas.

Nesta obra Maeder inclui tópicos da Teoria dos Determinantes que não são trabalhados no livro de sua autoria que analisamos anteriormente ("Álgebra Elementar – Equações e problemas algébricos", publicado em 1928), dentre eles: Propriedades dos Determinantes, Regra de Chió, Produto de Determinantes e Determinantes Especiais. Tal inclusão nos mostra a importância dada ao conteúdo Determinantes nesse manual.

Vale ressaltar que o autor utiliza o conceito de matriz para definir determinantes e produto de dois determinantes.

Destacamos que o manual contém todo o conteúdo previsto pelo programa oficial da 2ª série do "Ciclo Colegial", apresentado pelo autor no início do livro.

Livro: Matemática

Autor: Ary Quintella

Edição: 3ª

Ano de publicação: 1959

Editora: Companhia Editora Nacional – São Paulo

Nível de Ensino: Segundo ano do Ciclo Colegial

Ary Quintella, professor catedrático do Colégio Militar, escreveu diversos livros de matemática para todos os níveis de ensino. A obra "**Matemática**" desenvolvida para alunos do segundo ano do colegial, aborda os conteúdos previstos no Programa Oficial destinado a tal nível, sendo a 3ª edição publicada no ano de 1959.

Dividido em duas partes, o manual aborda os conteúdos do curso de Álgebra e Trigonometria. A primeira parte dedicada ao estudo de Álgebra é dividida em três unidades onde são trabalhados os temas: Análise Combinatória Simples, Binômio de

Newton, Determinantes e Sistemas Lineares. Os assuntos: Vetores, Funções Circulares Diretas, Arcos de Extremidades Associadas e suas Aplicações, Operações com arcos, Cálculo por Logaritmos, Equações Trigonométricas e Resolução de Triângulos compõem a parte de Trigonometria. As unidades são finalizadas com listas de exercícios propostos pelo autor.

A unidade dedicada ao estudo dos Determinantes é dividida em oito tópicos, o primeiro intitulado "Definições" que é iniciado com a definição de **matriz**: "Dados **m n** elementos, chama-se **matriz** ao quadro formado com esses elementos dispostos em m linhas e n colunas" (p.41). Em seguida, o autor define matriz quadrada, diagonais e apresenta o método para encontrar a ordem de uma matriz através do número de linhas e de colunas da mesma.

Exemplo: A matriz a seguir é de terceira ordem, pois possui três linhas e três colunas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinante de uma matriz quadrada é definido como "a soma dos produtos distintos dos elementos da matriz, tomados n a n, e de modo que em cada produto figure um único elemento de cada linha e de cada coluna e tendo cada produto o sinal + ou – [...]". (p.42)

Observação: Podemos obter os produtos que entram na formação do determinante permutando as letras e fixando os índices dos elementos da diagonal principal. Denominamos o produto dos elementos da diagonal principal de termo principal.

Quintella utiliza o símbolo Δ (delta) para representar um determinante e apresenta as três notações que podem ser utilizadas para representá-lo:

1) Escrevendo a matriz entre duas barras:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2) Indicando a soma dos termos derivados da diagonal principal:

$$\Delta = \Sigma\ a_1 b_2$$

3) Escrevendo o termo principal entre duas barras:

$$\Delta = |\ a_1 b_2\ |$$

Segundo Quintella, é fácil utilizar a definição para calcularmos um determinante de segunda ordem, pois só há dois produtos: da diagonal principal e da diagonal secundária. Para calcular o determinante de uma matriz de terceira ordem, o autor apresenta a Regra Prática de Sarrus, onde repetimos, abaixo da terceira, as duas primeiras linhas e formamos os produtos pelas diagonais que compreendem três elementos. As diagonais que forem paralelas à diagonal principal terão sinal positivo e as diagonais paralelas à diagonal secundária terão sinal negativo.

Em seguida, o autor apresenta as seguintes propriedades fundamentais dos determinantes, apresentando suas demonstrações e algumas aplicações:

> Se trocarmos as linhas pelas colunas e as colunas pelas linhas, na mesma ordem, o determinante não se altera.
> O determinante que tem todos os elementos de uma fila iguais a zero é nulo.
> Se trocarmos de posição duas filas paralelas, sem alterar a ordem dos elementos, o determinante troca de sinal, mantendo o valor absoluto. (p. 44-45).

No sexto tópico, o autor define determinante menor, adjunto ou complemento algébrico de um elemento.

Em seguida, Quintella apresenta dois teoremas que podem ser empregados para calcular um determinante a partir dos elementos de uma única fila:

> Quando os elementos de uma fila são nulos exceto um, o determinante é igual ao produto do elemento não nulo pelo respectivo adjunto. (...)
> O determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos seus respectivos adjuntos. (p.47-49).

O segundo teorema apresentado é conhecido como Teorema de Laplace, que possui várias conseqüências importantes que podem ser utilizadas para facilitar o cálculo de um Determinante:

- Para calcularmos um determinante qualquer podemos desenvolvê-lo sucessivamente até chegarmos a um determinante de segunda ordem onde podemos aplicar a Regra de Sarrus.

- Ao multiplicarmos ou dividirmos os elementos de uma linha do determinante, o determinante fica multiplicado ou dividido por esse número.
- A matriz que possui duas filas paralelas proporcionais o seu determinante é nulo.
- A soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos adjuntos dos elementos correspondentes de outra fila é nula.
- Se num determinante, os elementos de uma fila são somas de m parcelas, ele pode ser transformado na soma de m determinantes.
- Ao substituirmos uma fila pela sua soma com combinações lineares de filas paralelas o determinante não se altera (Teorema de Jacobi).

Em seguida o autor apresenta o Teorema de Jacobi o qual é utilizado para diminuir a ordem de um determinante sem alterar o seu valor, ou seja, a partir de várias operações, obtemos um determinante com uma fila onde todos os elementos, exceto um, são iguais à zero. Neste caso, o determinante será o produto do elemento não nulo pelo adjunto. A aplicação do Teorema de Jacobi pode ser abreviada se utilizarmos a regra de Chió, entretanto, tal regra só é útil quando temos um elemento do determinante igual a um.

Regra de Chió:

> 1º Suprime-se a linha e a coluna que se cruzam em $k_1 = 1$, cuja classe dá sinal ao determinante.
> 2º Subtrai-se cada elemento do menor obtido, o produto dos elementos que ficam nos pés das perpendiculares traçadas do elemento considerado às filas suprimidas. (p.57).

O autor propõe 30 exercícios nos quais, utilizando os conceitos e propriedades estudadas, o aluno deve calcular o valor dos determinantes. Quintella dá continuidade à unidade aplicando a teoria dos determinantes à Resolução de Sistemas Lineares.

Vale ressaltar que são tratados apenas os conteúdos sobre Determinantes que facilitam o seu cálculo e, conseqüentemente, que auxiliam na resolução de sistemas lineares. Destacamos que o autor utiliza o conceito de matrizes para definir Determinantes e todos os teoremas e propriedades apresentadas são matematicamente demonstradas.

Livro: Curso de Matemática

Autor: Manoel Jairo Bezerra

Edição: 4ª e 33ª

Ano de publicação: 1960 e 1976

Editora: Companhia Editora Nacional – São Paulo

Nível de Ensino: Cursos Clássicos e Científicos

O manual "**Curso de Matemática**" escrito pelo professor Manoel Jairo Bezerra para os alunos do primeiro, segundo e terceiro ano dos cursos Clássicos e Científicos, sendo a 4ª e 33ª edições publicadas, respectivamente, em 1960 e 1976, aborda conteúdos de Aritmética e Álgebra relativos aos três anos, Geometria referente ao 1º ano, Trigonometria para o 2º ano e Geometria Analítica para o 3º ano.

O capítulo sobre Determinantes encontra-se na parte de Aritmética e Álgebra indicado para o 2º ano. O conteúdo é abordado em 19 páginas, as quais são divididas em 26 tópicos.

No primeiro tópico o autor apresenta um breve texto sobre a origem da teoria dos determinantes:

> Apesar de ter sua origem em um problema da Álgebra Elementar, do qual já tomamos conhecimento no Curso Ginasial, a teoria dos determinantes desenvolveu-se a tal ponto que constitui hoje um algoritmo de grande importância na Matemática pura e aplicada. (p. 118)

O autor define matriz retangular e quadrada no segundo e terceiro tópicos, para então, no quarto tópico, definir determinante de uma matriz quadrada:

> À soma algébrica dos produtos, dos elementos de uma matriz quadrada de n^2 elementos, obtidos, permutando-se de todos os modos possíveis os índices superiores dos elementos da diagonal principal, fixando os inferiores, e admitindo-se que esses produtos sejam positivos ou negativos, conforme os índices superiores de seus fatores formem uma permutação de classe par ou ímpar, respectivamente. (p. 119)

Tal definição nos indica que, Bezerra adota a notação de matriz onde os elementos são seguidos de dois índices um inferior e outro superior:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{Vmatrix}$$

A partir da definição e da notação de um determinante, o autor apresenta, no quinto tópico, quatro conclusões sobre o número de termos de um determinante.

Em seguida são apresentadas, no sexto, sétimo e oitavo tópicos, o desenvolvimento de um determinante de segunda e terceira ordem e a Regra de Sarrus. Destacamos que o autor apresenta dois modos que podem ser utilizados (repetindo as duas primeiras colunas após a terceira ou repetindo as duas primeiras linhas após a última).

O autor apresenta seis propriedades dos determinantes que reduzem, com o auxílio da definição de determinantes, o trabalho do cálculo de um determinante de ordem maior do que três.

Após apresentar as propriedades dos determinantes, temos a definição do menor complementar de um elemento de um determinante e do complemento algébrico de um elemento de um determinante.

Propriedades decorrentes do desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma fila são os temas trabalhados no tópico 20 que possuiu seis dessas propriedades. No tópico 21 temos alguns exemplos de aplicações dos teoremas apresentados anteriormente.

Para facilitar o cálculo de determinantes de ordem maiores do que três o autor apresenta o método para diminuir a ordem de um determinante, utilizando inclusive a Regra de Chió.

No tópico 24 o autor apresenta um exemplo numérico da aplicação da Regra de Chió e três exercícios resolvidos sobre Determinantes. Além desses, o autor apresenta alguns exercícios resolvidos ao transcorrer da apresentação do conteúdo.

O tópico 26 é uma lista com 34 exercícios onde é necessário utilizar as propriedades estudadas para calcular o valor de um determinante ou demonstrar uma igualdade. Ao final do capítulo, podem ser encontradas as respostas de todos os exercícios.

Para nossa pesquisa, vale ressaltar nesta obra que são 29 edições publicadas em apenas 16 anos. Além disso, destacamos que são poucas as modificações encontradas entre a 4ª e 33ª edições, dentre elas a quantidade de exercícios propostos que passa de 31 para 34. A apresentação do conteúdo não é alterada.

Livro: O Cálculo de Matrizes

Autor: Harry Farrer

Edição: não consta

Ano de publicação: 1960

Editora: Universidade de Minas Gerais

Nível de Ensino: Ensino Superior

O manual "O Cálculo de Matrizes", escrito pelo ex-professor da Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais, Harry Farrer, foi publicado em Belo Horizonte, no ano de 1960. Tal obra foi desenvolvida a pedido dos alunos do curso de Engenharia Mecânica e Eletricidade. Dividido em quatro capítulos, o manual aborda os conteúdos ministrados por Farrer no decorrer do curso "Cálculo de Matrizes", entretanto, segundo o professor, no livro o assunto é abordado de maneira mais completa, incluindo demonstrações que não são feitas durante as aulas.

O primeiro capítulo, composto de 32 páginas, é subdividido em nove tópicos que abordam os seguintes temas: Definições e Notações; Matrizes Especiais; Igualdade e Adição de Matrizes; Determinante de uma Matriz; Multiplicação; Sistemas de Equações Lineares; Matriz Inversa; Solução de um Sistema de n equações com n incógnitas e Partição de Matrizes.

O primeiro tópico, intitulado "Matrizes - Operações", é iniciado com um pequeno texto sobre Matrizes:

> O algoritmo das matrizes já data de um século, pois foi usado pela primeira vez por Cayley, em 1857. Todavia seu emprego sistemático nos vários ramos do conhecimento humano é mais recente. Este algoritmo, flexível e compacto, encontra um campo fértil na resolução de sistemas simultâneos de equações algébricas lineares [...] (p. 5).

Em seguida, o autor define matrizes como "um conjunto de elementos arranjados num quadro retangular [...]" (p. 5), sendo esses elementos parte de um corpo.

Além da definição, o professor apresenta as três notações utilizadas para representar uma matriz.

No segundo tópico, Farrer define dez matrizes, denominadas matrizes especiais:

- Matriz Linha;
- Matriz Coluna;
- Matriz Nula;
- Matriz Quadrada;
- Matriz Diagonal;
- Matriz Escalar;
- Matriz Identidade;
- Matriz Triangular Superior;
- Matriz Triangular Inferior;
- Matriz Transposta.

Conforme o título nos revela, no terceiro tópico o autor aborda as definições e propriedades de igualdade e adição entre Matrizes.

Determinante de uma matriz quadrada é definido como "um número que se obtém desenvolvendo-se o determinante cujos elementos são idênticos aos elementos da matriz em questão" (p. 11). Além da definição acima, no quarto tópico, encontramos a representação de um determinante, a definição de uma matriz singular (determinante igual à zero), matriz não-singular (determinante diferente de zero), cofator e matriz adjunta.

No tópico seguinte o estudo se refere à multiplicação de um escalar por uma matriz e o produto entre duas matrizes destacando que esse último não possui a propriedade comutativa e demonstrando as propriedades de multiplicação entre duas matrizes:

- Associativa do Produto: Se A, B e C são matrizes e se a multiplicação entre elas existir, então: A. (B.C) = (A.B).C
- Transposição do Produto: Se C = AB, então: $C^T = B^T A^{T.}$
- Determinante de um Produto: $|AB| = |A| \times |B|$
- Distributiva: A (B+C) = AB + AC

Em seguida, são propostos quatro exercícios, sendo um numérico e três que abordam demonstrações de algumas propriedades de matrizes.

No sexto tópico, o autor apresenta o método para representarmos um sistema linear através da multiplicação e igualdade de matrizes.

Iniciando o tópico sobre Matriz Inversa, o autor denomina uma matriz inversa da matriz A, a matriz A^{-1}, tal que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, onde I é a matriz Identidade. Para que uma matriz A possua inversa, ela deve, necessariamente, ser quadrada e não singular, ou seja, seu determinante deve ser diferente de zero.

Após apresentar e demonstrar as propriedades de uma matriz inversa, o autor apresenta as operações elementares, o método para se obter a inversa de uma matriz através de tais operações (o autor denota a matriz (A|I), e afirma que, efetuando as operações elementares adequadas, obtemos (I|B), onde a matriz B é a inversa de A) e os procedimentos para alcançar a solução de um sistema linear, utilizando matriz inversa ($X = A^{-1}.C$, onde X é a matriz dos coeficientes, A^{-1} a inversa da matriz dos coeficientes e C a matriz dos termos independentes). Após apresentar todo o conteúdo sobre inversa de matrizes o autor propõe quatro exercícios sobre esse tema.

Finalizando o primeiro capítulo, o professor apresenta um estudo sobre Partição de Matrizes que contempla a definição e a regra operatória para se obter uma Partição, apresenta um exemplo e propõe dois exercícios sobre o conteúdo.

Os capítulos seguintes são dedicados ao estudo das aplicações de Matrizes. No segundo capítulo os tópicos estudados são: Dependência Linear de matrizes colunas; Sistemas Lineares homogêneos de equações e Característica de uma Matriz. O terceiro capítulo é composto pelos assuntos: Valores característicos; Transformação linear; Vetores Característicos; Diagonalização; Matrizes adjuntas; Produto escalar de matrizes colunas; Matrizes Hermitianas; Matriz Unitária; Diagonalização de matrizes Hermitianas; Matrizes Simétricas Reais; Matrizes Ortogonais e Diagonalização de matrizes simétricas reais. Finalizando o livro, no quarto capítulo, são trabalhados os temas: Formas Hermitianas e formas quadráticas e Aplicações geométricas.

Podemos destacar algumas características sobre a apresentação dessa obra, em especial que o manual é datilografado, o que reforça a idéia de “notas de aula” que o autor diz ser a essência deste manual. Nos três primeiros capítulos o autor utiliza uma “linguagem natural” enquanto no quarto capítulo prevalece uma “linguagem matemática”[7]. Em nosso exemplar existem várias anotações feitas a lápis por algum de seus leitores. Tais anotações que, juntamente com grifos em caneta podem ser encontradas em praticamente todas as páginas, completam e destacam a teoria apresentada ou corrigem erros de digitação. Pelas suas características, permitem conjecturarmos que, de fato, foi utilizada para o ensino em sala de aula.

Vale ressaltar, ainda, que o tema determinante é abordado numa única página da obra. Nela, o autor define determinante de uma matriz quadrada como sendo “(...) o número que se obtém desenvolvendo-se um determinante cujos elementos são idênticos aos elementos da matriz em questão.” (p. 11). Assim, o autor se utiliza da definição de determinante para definir o determinante de uma matriz o que nos leva a conjecturar que tal tema era previamente ensinado.

A obra é toda dedicada, então, ao estudo de Matrizes (como seu título já anuncia) e se pode perceber que temas como sistemas lineares são tratados como suas possibilidades de aplicações. Assim, esta obra, que se auto-classifica como “notas de aulas”, permite-nos perceber que as Matrizes tinham certo destaque nos cursos de Engenharia Mecânica e Elétrica da Universidade de Minas Gerais nas décadas de 1950 e 1960, merecendo um curso específico para abordá-las.

Livro: Matemática

Autor: Irmãos Maristas

Edição: 3ª

Ano de publicação: 1965

Editora: FTD

Nível de Ensino: Colegial

---

[7] Utilizamos o termo “linguagem matemática” para expressar que o autor utiliza, predominantemente, os símbolos matemáticos para enunciar e demonstrar os conceitos e propriedades que compõem o estudo.

O livro “**Matemática**” escrito pelos Irmãos Maristas, para a segunda série do Curso Colegial, aborda conteúdos de Álgebra e Trigonometria, sendo a 3ª edição publicada em 1965, pela editora FTD.

Ao contrário do aconselhado pelos programas oficiais, o manual é iniciado com o estudo de Trigonometria seguido pelo estudo de Álgebra. Os autores justificam tal inversão: “em física do 2.º científico, essencialmente no estudo do movimento harmônico e da acústica, são imprescindíveis conhecimentos de trigonometria ignorados pela maioria dos alunos” (p.7)**.**

No prefácio encontramos alguns esclarecimentos quanto aos conteúdos e a ordem de apresentação dos mesmos, agradecimentos e indicações de outros livros da coleção da FTD.

Em seguida é apresentado o programa abordado no livro e algumas instruções metodológicas para o ensino de Matemática. Ao ensino de Determinantes e Sistema Lineares o autor propõe três itens:

> 1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes Menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió.
> 2. Sistema de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer.
> 3. Sistema de m equações lineares com n incógnitas. Teorema de Rouché.
>
> **Nota**: O item 3 pertence somente ao programa do curso científico. (p.10)

Na primeira parte, Trigonometria, são trabalhados os seguintes temas: Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas. Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples. Resoluções trigonométricas de triângulos. A segunda parte, dedicada ao estudo de Álgebra, trata dos tópicos: Análise combinatória simples. Binômio de Newton. Determinantes; Sistemas Lineares.

O capítulo sobre determinantes, composto por 54 páginas, é dividido em 32 tópicos.

No primeiro tópico, o autor apresenta uma breve história sobre a origem dos determinantes:

> A teoria dos determinantes surgiu quase simultaneamente na Alemanha e no Japão, pois os determinantes foram descobertos independentemente por

> Leibniz (1646 – 1716) e por Seki Shinsuke Kowa (19642 – 1708). Esses dois matemáticos estruturaram a teoria dos determinantes ao solucionarem um problema de eliminações necessárias à resolução de 1 sistema de m equações a m incógnitas.(p. 271).

Em seguida define matriz retangular de m linhas e n colunas como um conjunto de m.n elementos dispostos em m linhas horizontais e n linhas verticais e apresenta suas notações:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & b_m & \cdots & l_m \end{Vmatrix}$$

No terceiro tópico temos a definição de matriz quadrada. Com o objetivo de evitar confusões nos enunciados dos teoremas o autor apresenta as seguintes definições:

- **Linha da matriz:** conjunto de n elementos localizados numa mesma linha horizontal;
- **Coluna da matriz:** conjunto de n elementos localizados numa mesma linha vertical;
- **Fila da matriz:** uma linha ou coluna da matriz;
- **Filas perpendiculares:** uma linha e uma coluna, simultaneamente;
- **Ordem ou grau da matriz quadrada:** é o número de suas linhas;
- **Elementos principais:** são os elementos que apresentam índices iguais;
- **Diagonal Principal:** é o conjunto dos elementos principais, é a diagonal que desce da esquerda para a direita;
- **Elementos Simétricos** ou **conjugados:** são dos elementos da forma a_{rs} e a_{sr}.
- **Matrizes Semelhantes:** são aquelas que têm o mesmo número m de linhas e o mesmo número n de colunas;
- **Elementos pares:** são aqueles cuja soma dos índices é par;
- **Elementos ímpares:** são aqueles cuja soma dos índices é ímpar.

No quarto tópico, o autor define determinante como:

> A soma algébrica de todos os produtos diferentes obtidos com os n^2 elementos de uma matriz quadrada, de modo que cada produto tenha um elemento de cada linha e de cada coluna, afetado do sinal positivo ou negativo conforme seus elementos pertencerem a permutação de classe par ou ímpar. (p. 273)

Para representar o valor numérico de um determinante utiliza-se o símbolo Δ (delta).

No quinto e sexto tópico, o autor desenvolve determinantes de segunda e terceira ordem, respectivamente. Para desenvolver um determinante de terceira ordem o autor utiliza, além da regra prática de Sarrus, a regra do triângulo isóscele, também conhecida como regra do octógono estrelado.

Para facilitar o desenvolvimento dos determinantes os Irmãos Maristas apresentam e demonstram, entre o tópico 7 e o 14, diversas das suas propriedades. Dentre elas, podemos destacar:

> **Teorema de Becker**: Um determinante não se altera quando se permutam as filas pelas colunas correspondentes.
> **Teorema de Janni**: Um determinante não se altera quando se trocam os sinais dos seus elementos ímpares.
> **Teorema de Bezout**: Num determinante, trocando-se uma pela outra, duas linhas o duas colunas, o determinante muda de sinal. (p. 276 – 277)

Em seguida, o autor ressalta que a definição apresentada para um determinante só é aplicada a matrizes de ordem maior ou igual a dois, então, estende o conceito para uma matriz de ordem igual a um, ou seja, o determinante de uma matriz de primeira ordem é o próprio número (elemento) da matriz.

Nos tópicos seguintes, o autor define determinante menor, determinante menor complementar, determinante menor principal e complemento algébrico e apresenta o método para encontrar a classe de um determinante menor.

Após apresentar tais definições o autor demonstra os seguintes teoremas:

> Um determinante pode sempre ser desenvolvido conforme os elementos de uma linha ou de uma coluna. (...)
>
> Num determinante, se todos os elementos da 1ª linha ou 1ª coluna são nulos menos o 1º, o determinante é igual a este elemento, multiplicado pelo determinante menor que resulta da supressão da 1ª linha e da 1ª coluna. (...)

> Num determinante, se todos os elementos de uma linha ou coluna são nulos menos um, o seu valor é igual a este elemento multiplicado pelo determinante menor que resulta da supressão da linha e da coluna deste elemento, com o sinal + ou – conforme o total das ordens da linha e coluna dos índices no elemento dado for par ou ímpar. (...)
>
> Um determinante é nulo, quando os elementos de uma linha ou coluna o nulos. (...)
>
> Se todos os elementos situados de um mesmo lado forem nulos, o determinante reduz-se ao termo principal. (p. 284 - 286)

Em seguida, o autor apresenta o Teorema de Laplace, Teorema de Cauchy e Teorema de Jacobi.

Para facilitar o desenvolvimento do determinante podemos elevar ou abaixar sua ordem de modo que seu valor não mude. Para elevar a ordem de um determinante é suficiente acrescentar uma linha e uma coluna a ele. Para tanto, precisamos ter uma das seguintes condições:

1. A unidade figure na diagonal;
2. Zeros ocupem as vagas de uma linha (ou coluna);
3. Quaisquer elementos ocupem as vagas de umas colunas (ou linha).

Em seguida o autor apresenta a zetética (método para resolver problemas) referente ao cálculo dos determinantes em três fases:

a) Operações preparatórias: momento onde devemos tornar os elementos fracionários em elementos inteiros; verificar se o determinante é zero, segundo as propriedades anunciadas; verificar se há fila com elementos nulos, exceto um, para aplicar a definição de adjunto de um elemento.
b) Processos gerais: o de Laplace, o da transformação em zeros, o de Chió, o de Houel;
c) Artifícios peculiares: algumas vezes calculamos o valor de um determinante utilizando suas propriedades, entretanto, outras vezes, alguns carateres especiais permitem obter o valor do determinante.

Nos tópicos 30 e 31 o autor aborda conteúdos sobre produto de determinantes: o produto de duas filas e o produto entre dois determinantes.

Finalizando o capítulo sobre determinantes, no tópico 32, o autor apresenta a definição, exemplos, propriedades e demonstrações de alguns determinantes especiais, dentre eles:

1. **Determinante Simétrico**: é aquele cujos elementos conjugados são iguais, ou seja, $a_{rs}=a_{sr}$;
2. **Determinante hemi-simétrico ou anti-simétrico**: os elementos conjugados são opostos;
3. **Determinante oblíquo**: é aquele que se torna hemi-simétrico pela anulação dos termos da diagonal principal;
4. **Determinante pseudo-simétrico ou reverso**: é aquele em que os elementos simétricos são opostos e os elementos principais diferentes de zero;
5. **Determinante orto-simétrico ou de Hankel**: os elementos localizados em cada paralela à diagonal secundária são iguais;
6. **Determinante bissimétrico**: os elementos são opostos, simétricos, em relação à diagonal secundária;
7. **Determinante Centrado**: os elementos são opostos, simétricos em relação às diagonais principal e secundária;
8. **Determinante adjunto**: os elementos são os complementos algébricos dos elementos respectivos do determinante;
9. **Determinante recíproco**: determinante recíproco R de um determinante Δ não-nulo é aquele cujos elementos são os quocientes, por Δ, dos complementos algébricos dos elementos respectivos de Δ;
10. **Determinante de Vandermonde**: é o determinante formado com as potências de n elementos diferentes;
11. **Determinante Ortogonal**: a soma dos quadrados dos elementos de uma fila qualquer é igual a 1 e a soma dos produtos dos elementos homólogos de filas diferentes é zero;
12. **Determinante Circulante ou cíclico**: é formado por n elementos e de base (a, b,..., l) cujas filas são constituídas pelas n permutações circulares ou cíclicas da permutação a, b,..., l.

13. **Determinante Continuante**: é o determinante pseudo-simétrico, reverso, cuja diagonal principal é constituída por n números, as suas duas paralelas contíguas pelos elementos 1 e -1 e os demais são nulos.

O item 14 é subdivido em nove itens nos quais o autor apresenta, a título informativo para os alunos mais estudiosos, os seguintes determinantes especiais:

1. Determinante Secular;
2. Determinante de Smith;
3. Determinante de Wronsky;
4. Determinante funcional;
5. Determinante de função Hessiano;
6. Determinante infinito de Koch;
7. Determinante de Fredholm;
8. Determinante Mágico;
9. Determinantes principal e característico.

Os irmãos Maristas propõem uma lista com 51 exercícios, seguidos por suas respostas, que abordam todos os tópicos estudados. Em seguida, o autor apresenta um “Suplemento Referente aos Determinantes” com 60 exercícios sobre o conteúdo, retirados das provas de admissão da Escola Nacional de Engenharia, do ITA, da Faculdade Nacional de Engenharia, entre outras.

O autor aborda todo o conteúdo sobre a teoria dos determinantes, demonstrando, detalhadamente, todas as propriedades e teoremas apresentados. Cabe ressaltar que, durante todo o texto, o autor utiliza símbolos matemáticos.

Na forma de apresentação do conteúdo destacamos duas características: a primeira é o fato de o autor nomear algumas das propriedades dos determinantes. A segunda é que o autor diminui a fonte do texto para apresentar conceitos e teoremas que, segundo ele, são menos importantes, ou não são utilizados.

Para o objetivo da nossa pesquisa, destacamos que, dentre todos os manuais já analisados, esse é o primeiro a apresentar uma definição para o determinante de uma matriz de primeira ordem. Além disso, nos chamou a atenção o fato do autor nomear as propriedades, como Teorema de Janni, Teorema de Becker etc. Vale ressaltar que o manual contém diversos tópicos além dos exigidos pelo programa oficial, dentre eles o Produto de Determinantes e os Determinantes Especiais.

Além de nos aparentar uma preocupação com o rigor matemático, devido o uso da linguagem matemática nas demonstrações, os autores demonstram, também, uma preocupação metodológica apresentando sugestões de abordagens em sala de aula.

Livro: Álgebra Linear

Autor: L. H. Jacy Monteiro

Edição: 3ª

Ano de publicação: 1965

Editora: LPM

Nível de ensino: Superior

O manual "Álgebra Linear" é destinado aos alunos do curso de Matemática das Faculdades de Filosofia, sendo a 3ª edição publicada no ano de 1965. Monteiro, autor da obra, explica que nessa edição houve uma simplificação da matéria exposta, visando os objetivos propostos no ensino da Álgebra Linear, entretanto não expõe tais objetivos.

O livro é composto por dois capítulos, os quais são divididos em quatro "parágrafos". O primeiro capítulo, intitulado "Espaços Vetoriais", aborda, é iniciado com as definições de Espaço Vetorial e Subespaços. No segundo parágrafo, é apresentado o tópico sobre Dependência Linear, no terceiro, as Somas Diretas e, no quarto parágrafo, o estudo dos Espaços quocientes.

O capítulo seguinte, "Aplicações Lineares e Matrizes", como o próprio título nos revela, aborda, além das Aplicações Lineares e de conteúdos básicos sobre Matrizes tais como suas operações elementares o conteúdo de Mudança de Base e Sistemas Lineares. Ao final de cada parágrafo o autor propõe exercícios sobre os tópicos estudados.

O parágrafo sobre Matrizes, o segundo do capítulo II, é composto por 53 páginas e dividido em oito tópicos, conforme os temas: Matrizes retangulares e quadradas, definições; Matriz de uma aplicação linear; Estrutura de um espaço vetorial sobre M (K; mxn); Produto de Matrizes retangulares; Equações de uma aplicação linear; Estruturas de espaço vetorial, anel e álgebra sobre M_n (K); Matrizes quadradas inversíveis e, por fim, Posto de uma matriz.

Monteiro inicia o estudo sobre Matrizes definindo uma matriz retangular:

Consideremos os conjuntos I = {1, 2,..., m} e J = {1, 2,..., n}, onde m e n são números naturais não nulos e seja E um conjunto não vazio. Chama-se matriz retangular mxn sôbre E a tôda aplicação de IxJ em E. Em geral indicaremos uma matriz retangular α: IxJ → E pela notação indexada

$$\alpha = \left(\alpha_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in IxJ}`$$

onde $\alpha_{(i,j)}$ é o valor da aplicação α no par (i,j). Esta notação será substituída por

$$\left(\alpha_{(ij)}\right)_{(i,j)\in IxJ}`$$

ou, simplesmente, por

$$\left(\alpha_{(ij)}\right)$$

quando não houver a necessidade de mencionar explicitamente os conjuntos de índices I e J. Podemos ainda usar as notações

$$\left(\alpha_{(ij)}\right)_{i\in I,\, j\in J}` \text{ ou } \left(\alpha_{(ij)}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n}.$$

Tôda matriz retangular nxn é chamada matriz quadrada de ordem n. Indicaremos por M(E;mxn) o conjunto de tôdas as matrizes retnagulares mxn sobre o conjunto E e colocaremos $M_n(E)$=M(E;mxn) (...) (p. 119-120)

Na seqüência, o autor define a igualdade de matrizes e apresenta a possibilidade de denotar uma matriz explicitamente, utilizando parênteses para delimitar os elementos que compõem a matriz.

Linha e coluna de uma matriz são definidas em decorrência da notação explícita de matriz. Assim, Monteiro define linha i-ésima ou linha de índice i de uma matriz, para todo i∈I, a família $\left(\alpha_{(ij)}\right)_{1\le j\le n}$. Analogamente, define a coluna j-ésima ou coluna de índice j. Assim, o índice i é denominado índice de linha e o índice j, índice de coluna.

Em seguida o autor apresenta as seguintes definições: "(...) A família $\left(\alpha_{ii}\right)_{1\le i\le n}$ é denominada diagonal principal desta matriz". (p.121) e "Toda matriz retangular nx1 é chamada matriz coluna e toda matriz retangular 1xn é chamada matriz linha". (p. 122)

Para economizar espaço a matriz coluna é indicada por $^t(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, onde t, segundo o autor, é abreviatura de transposta, notação que, esclarece, será justificada mais adiante.

Finalizando o primeiro tópico, destinado às definições, o autor considera a possibilidade dos conjuntos de índices não serem, necessariamente, I = {1, 2,..., m} e J = {1, 2,..., n}, exemplificando com o caso de submatrizes. Assim, elimina esta restrição da sua definição e afirma que, apesar disso, todas as demais noções (de linha, coluna etc.) permanecem válidas com esta nova definição.

Prosseguindo o estudo, no segundo tópico o autor define matriz de uma aplicação linear como sendo aquela que relaciona as bases de dois espaços vetoriais. Tal relação é definida, ainda que sem usar este nome, por meio da multiplicação de matrizes. Nas palavras de Monteiro;

> Sejam E e F dois espaços vetoriais de dimensões finitas sôbre um mesmo corpo K; seja $(a_j)_{1 \le j \le n}$ uma base de E e $(b_i)_{1 \le i \le m}$ uma base de F. Consideremos uma aplicação linear u de E em F; para cada índice j, com $1 \le j \le n$, o vetor u(a_j) pertence a F, logo
>
> $$u(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i,\ j = 1,2,...,n$$
>
> ,
>
> (...)
>
> Fica assim definida uma matriz retangular $(\alpha_{ij}) \in M(K; mxn)$ que é denominada <u>matriz</u> <u>da</u> <u>aplicação</u> <u>linear</u> u <u>em</u> <u>relação</u> <u>às</u> <u>bases</u> (a_j) e (b_i) (...) que será indicada por (...)
>
> $M(u; (a_j), (b_i))$ (...) (p.123)

Na seqüência, o autor apresenta um exemplo numérico de matriz de uma aplicação linear de $\Re^3$ em $\Re^2$ para, em seguida, em cinco outros exemplos, definir matriz unidade, matriz nula, matriz escalar, matriz do vetor e matriz da forma linear.

Antes de propor sete exercícios com os quais encerra este tópico, o autor apresenta um resumo onde retoma, em outros termos, a teoria apresentada.

O terceiro tópico deste parágrafo é destinado ao estudo da "Estrutura de espaço vetorial sobre M(K;mxn)". Deste tópico cabe-nos ressaltar que o autor utiliza-se de um resultado da estrutura dos espaços vetoriais para definir a soma de matrizes e o produto de uma matriz por um escalar.

> Vimos, no exemplo 6 do capítulo I, que se K é um corpo e se I é um conjunto de índices, então, podemos definir uma estrutura de espaço vetorial sôbre o conjunto K^I, de tôdas as famílias de elementos de K e tendo I para conjunto de índices, por intermédio de
>
> (7) $$(\alpha_i)_{i \in I} + (\beta_i)_{i \in I} = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I}$$
>
> (8) $$\alpha.(\alpha_i)_{i \in I} + (\beta_i)_{i \in I} = (\alpha\ \alpha_i)_{i \in I}$$
>
> Tomando-se I como o produto cartesiano dos conjuntos {1, 2,..., m} e {1, 2,..., n} resulta, em particular, que sôbre M(K;mxn) está definida uma estrutura de espaço vetorial sôbre corpo K, espaço este que é denominado <u>espaço</u> <u>vetorial</u> <u>das</u> <u>matrizes</u> <u>retangulares</u> mxn. (...) Notemos, simplesmente,

> como as fórmulas (7) e (8) nos dão a soma de duas matrizes retangulares e o produto de uma escalar por uma matriz retangular:
>
> $$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$
>
> e
>
> $$\alpha.(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha\ \alpha_{ij})$$
>
> ou, explicitamente, (...) (p.131)

Finalizando o tópico, Monteiro apresenta um teorema que afirma que a aplicação $u \mapsto M(u;(a_j),(b_i))$

> (...) é um isomorfismo do espaço vetorial dos homomorfismos de E em F no espaço vetorial das matrizes retangulares mxn.
> Observemos que o isomorfismo acima depende essencialmente das bases (a_j) e (b_i) fixadas em E e F; em certos problemas fixam-se as bases de E e de F e pode-se, então, considerar as matrizes retangulares como aplicações lineares ou operadores. Não faremos isso nestas notas. (p. 134)

"Produto de matrizes retangulares" é o título do quarto tópico que inicia anunciando que a "(...) definição de produto de duas matrizes retangulares será obtida a partir da noção de produto de duas aplicações lineares (...)" (p.137). Assim, o autor propõe, a partir da definição de aplicação linear, a composição de duas aplicações lineares quaisquer (u e v). Através de algumas manipulações algébricas, deduz que a matriz da aplicação linear resultante desta composição é o produto das matrizes das aplicações lineares que a compõem, ou seja, $M(vu;(a_j),(c_k)) = (\gamma_{kj})$, onde: $\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\,\alpha_{ij}$, $(\alpha_{ij}) = M(u;(a_j),(b_i))$ e $(\beta_{ki}) = M(v;(b_i),(c_k))$ para três espaços de dimensões finitas E, F e G sobre um mesmo corpo K e com bases, respectivamente, $(a_j)_{1\le j\le n}$, $(b_i)_{1\le i\le m}$ e $(c_k)_{1\le k\le p}$. Feitas estas considerações, define:

> Definição 4 – Chama-se <u>produto</u> da matriz retangular $(\beta_{ki}) \in M(K;pxm)$ pela matriz retangular $(\alpha_{ij}) \in M(K;mxn)$ à matriz $(\gamma_{kj}) \in M(K;pxn)$ definida por
>
> (13) $$\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\,\alpha_{ij} ,$$
>
> para k=1,2,...,p e j=1,2,...,n. (p.138)

Feita a definição, o autor observa que o produto de duas matrizes retangulares só é definido quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda. Explica, então, em outras palavras, que "(...) a matriz do produto de duas aplicações lineares é igual ao produto (na mesma ordem) das matrizes destas aplicações". (p.138).

Ainda numa aparente tentativa de tornar a definição de produto de matrizes retangulares mais funcional, o autor ressalta:

> Notemos que o produto de duas matrizes 1xm e mx1 é uma matriz 1x1 que pode ser identificada ao escalar correspondente; por exemplo:
> $$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)\ .\ {}^t(\beta_1, \beta_2, ...\beta_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1 \beta_1\ .$$
> Por causa dêste resultado a fórmula (13) pode ser lida: o elemento (k, j) da matriz produto $(\beta_{ki}).(\alpha_{ij})$ é igual ao produto da k-ésima linha da matriz (β_{ki}) pela j-ésima coluna da matriz (α_{ij}). Diremos, então, que o produto de matrizes retangulares, dado pela definição 4, é um "produto linha por coluna". (p.138-139)

Após tais considerações o autor discute as propriedades sobre o produto de matrizes retangulares: Associativa, Distributiva à direita e à esquerda e produto pela identidade ($A.I_n=A=I_m.A$). O tratamento dado a estas propriedades é bastante formal, apesar da introdução às demonstrações ser feita em linguagem natural, utilizando-se a notação da teoria dos conjuntos generalizando os resultados para matrizes formadas por elementos de um corpo K qualquer.

> Estas propriedades podem ser verificadas, diretamente, a partir das definições de soma de duas matrizes retangulares, de produto de um escalar por uma matriz retangular e de produto de das matrizes retangulares (ver o exercício 86); no entanto, preferimos verificá-las utilizando estas mesmas propriedades que já são verdadeiras para aplicações lineares. Sejam E, F e G três espaços vetoriais de dimensões n, m e p, respectivamente, sôbre o corpo K e sejam (a_j), (b_i) e (c_k) bases fixas destes espaços; conforme o teorema 13 existem u, u_1 e u_2 em Hom (E,F) e v, v_1 e v_2 em Hom (F,G) tais que (...). (p.140)

Para concluir este tópico, Monteiro observa que as definições de soma e produto de matrizes e produto de um escalar por uma matriz "(...) podem ser estendidas, formalmente, para matrizes retangulares sôbre um anel comutativo A com elemento unidade." (p.141) e propõe sete exercícios que envolvem tanto o cálculo algébrico com matrizes como a manipulação das definições apresentadas, especialmente para a demonstração de algumas propriedades envolvendo o produto de matrizes retangulares.

O quinto tópico, Equações de uma aplicação linear, consiste na definição de equações de uma aplicação linear u em relação ao par de bases (a_j) e (b_i), o que, segundo o autor, consiste em calcular as coordenadas de uma transformação de um elemento por meio de uma aplicação linear em relação à base do conjunto de chegada.

Neste tópico o autor resolve um exemplo utilizando as igualdades definidas como equação de uma aplicação linear, apresenta algumas propriedades e finaliza propondo alguns exercícios.

O sexto tópico é destinado às "Estruturas de espaço vetorial, anel é álgebra sôbre $M_n(K)$". Neste tópico o autor argumenta que o conjunto das matrizes quadradas de ordem n ($M_n(K)$) apresenta, com a adição e multiplicação de matrizes definidas anteriormente, as propriedades: i) associativa da multiplicação; ii) distributiva à direita e à esquerda da multiplicação em relação à adição e iii) elemento neutro da multiplicação. Desta forma, as operações de adição e multiplicação definem um anel com elemento unidade sobre o conjunto $M_n(K)$. Ressalta, porém, que $M_n(K)$ é um anel não comutativo, e apresenta um exemplo em que $AB \neq BA$.

Na seqüência, Monteiro argumenta que "(...) $M_n(K)$ é uma álgebra associativa com elemento unidade sôbre o corpo K em relação às operações de adição, de multiplicação escalar e de multiplicação." (p. 152) e demonstra que qualquer endomorfismo de um espaço vetorial de dimensão finita é equivalente a $M_n(K)$ como espaços vetoriais ou como anéis ou como álgebras. Por fim, propõe 19 exercícios sobre este assunto.

"Matrizes quadradas inversíveis" é o título do penúltimo tópico. Nele o autor relembra as propriedades do elemento inverso em um anel para verificá-las no caso específico do anel $M_n(K)$. Toda a teoria é desenvolvida utilizando-se a linguagem própria da álgebra, através dos espaços vetoriais e das estruturas algébricas utilizando, também, a linguagem natural para explicitar o raciocínio que permite concluir, como teorema, que se uma matriz possui inversa, à direita ou à esquerda, ela é inversível.

Antes de propor 12 exercícios em que pede a demonstração de vários resultados sobre a inversão de matrizes, o autor adverte:

> No exercício 114 daremos um método para determinar a inversa de uma matriz quadrada de ordem n, supondo-se conhecida a teoria dos determinantes; êste método envolve muitos cálculos e só é recomendável para matrizes de ordem 2 ou 3. No §3 veremos um processo mais prático para calcular a inversa de uma matriz sem utilizar a teoria dos determinantes. (p.161).

O enunciado do exercício 114 é o seguinte:

> Supondo conhecida a teoria dos determinantes das matrizes quadradas sôbre um corpo K, demonstrar que $A \in M_n(K)$ é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. (Sugestão: Se $A=(\alpha_{ij})$ e $\det A \neq 0$ define-se $\beta_{ij} = \alpha'_{ji}/\det A$, onde α'_{ji} é o complemento algébrico do elemento α_{ji}; a matriz (β_{ij}) é a inversa de A. Lembrar também que det(AB) = det A. det B.) (p.161-162)

O oitavo e último tópico deste segundo parágrafo tem por tema "Pôsto de uma matriz". Este tópico é iniciado pela definição de vetor coluna de uma matriz, que é base da definição de posto:

> Chama-se <u>pôsto</u> (coluna) de U [$U= (\alpha_{ij}) \in M$ (K;mxn)] à dimensão do sub-espaço $S=[c_1, c_2, \ldots , c_n]$ gerado pelos vetores colunas de U, portanto, o pôsto de U é igual ao número máximo de vetores colunas, de U, que são linearmente independentes. Indicaremos por $\rho(U)$ o pôsto da matriz U. (p. 163 – sublinhado do autor)

Após demonstrar um teorema sobre o posto de uma matriz, o autor esclarece que se pode definir o posto linha de uma matriz de modo análogo ao apresentado para o posto coluna e que em álgebra elementar define-se a característica de uma matriz por meio da teoria dos determinantes e que se pode demonstrar que a característica coincide com o posto da matriz.

Após propor cinco exercícios que tratam do conteúdo deste tópico, o autor propõe uma lista com 22 exercícios sobre todo o conteúdo apresentado no segundo parágrafo, específico sobre matrizes.

Vale ressaltar que nos parágrafos seguintes (mudança de bases e sistemas lineares) o autor apresenta diversas aplicações da teoria das sobre matrizes desenvolvida.

Para nossa pesquisa, podemos perceber que este livro, destinado ao ensino superior, dá um tratamento mais "sofisticado" à teoria das matrizes. O conteúdo ensinado não é elementar, são utilizados vários recursos da álgebra linear e da teoria dos conjuntos.

Embora demonstre preocupação com a exatidão da linguagem, nas demonstrações a linguagem natural é largamente utilizada o que indica uma preocupação com a compreensão por parte do estudante. Tal preocupação pode também ser percebida pela relativamente grande quantidade de exercícios propostos, vários deles com sugestões de solução, embora poucos exemplos sejam apresentados no desenvolvimento da teoria. Sobre os exercícios cabe observar, ainda, que a maior parte deles se referem ao desenvolvimento teórico em nível superior, requerendo grande quantidade de demonstrações de propriedades da teoria abordada. De toda forma, a construção do conhecimento segue uma estrutura formal, com um encadeamento lógico dos conteúdos.

Livro: Matemática

Autor: School Mathematics Study Group

Edição: 1ª Edição

Ano de publicação: 1966

Editora: Edart – Livraria Editora Ltda.

Nível de Ensino: Curso Colegial

A obra "Matemática", desenvolvida pelo SMSG - School Mathematics Study Group - teve sua 1ªedição, publicada em edição experimental, no ano de 1966, sendo dividida em três volumes.

O volume I, desenvolvido para o primeiro ano do curso colegial, tem como temas de estudo: Conjuntos, Números Reais e Retas; Retas, Planos e Divisão; Ângulos e Triângulos; Retas e Planos Perpendiculares; Paralelismo no Espaço; Volume dos Sólidos; Geometria Analítica Plana; Conceito de Função e Função Linear; Funções e Equações Quadráticas e Equações do Primeiro e Segundo Graus em duas variáveis.

Seguindo o estudo, no segundo volume são abordados os conteúdos de: Logaritmos e Expoentes; Introdução à Trigonometria; Sistema de Números Complexos; Sucessões e Séries e Permutações, Combinações e o Teorema de Binômio.

O terceiro volume – o qual será utilizado em nosso estudo –, desenvolvido para o terceiro ano do colegial, é composto por nove capítulos, entre o 17 e o 25, onde são abordados os seguintes conteúdos: Operações com Matrizes; A Álgebra das Matrizes 2×2; Matrizes e Sistemas Lineares; Representação de Matrizes Coluna por Vetores Geométricos; Transformação do Plano; Forma Polar dos Números Complexos; Funções; Funções Polinômias; Tangentes aos Gráficos de Funções Polinômias.

O capítulo 17, o primeiro deste volume, intitulado "Operações com Matrizes", é dividido em 10 tópicos: Introdução; A ordem de uma Matriz; Igualdade de Matrizes;

Adição de Matrizes; Adição de Matrizes (Conclusão); Multiplicação de Matrizes por um Número; Multiplicação de Matrizes; Propriedades da Multiplicação de Matrizes; Propriedades da Multiplicação de Matrizes (Conclusão) e Resumo.

No primeiro tópico é apresentada uma breve introdução sobre o conteúdo, onde os autores ressaltam além da sua importância, sua aplicação em diversos ramos da ciência e da engenharia e apresentam alguns exemplos de uso no cotidiano, definindo, por fim, matrizes como "(...) um conjunto retangular ordenado de elementos dispostos em linhas e colunas" (p.517).

No segundo tópico é abordada a definição de ordem de uma matriz. Segundo os autores "(...) a ordem de uma matriz é dada dizendo primeiro o número de linhas e em seguida o número de colunas na matriz" (p.517), ou seja, uma matriz com m linhas e n colunas é de ordem m×n (lê-se m por n), quando m e n são iguais dizemos que a matriz é quadrada e ao invés de dizermos que a matriz é de ordem n×n, dizemos apenas que a matriz é quadrada de ordem n.

Além disso, temos a definição de matriz de uma linha, denominada, também, vetor-linha, sendo que essa, assim como a matriz de uma coluna, ou vetor-coluna, podem representar um ponto no plano ou no espaço, conforme os exemplos: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Para representar uma matriz genérica é adotada a notação onde a matriz é representada com letras maiúsculas e seus elementos com letras minúsculas com índices apropriados. Conforme segue no exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Em seguida os autores apresentam a seguinte definição de matriz transposta: "Se $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ é uma matriz m×n, então a transposta A^t de A é a matriz n×m, $B = \lfloor b_{ji} \rfloor$, com $b_{ji} = a_{ij}$ para cada i, j (i = 1, 2,..., n; j = 1, 2,..., m)". (p.519)

O tópico é finalizado com seis problemas sobre o tema estudado exigindo que os alunos relacionem o conteúdo com o seu dia-a-dia, como podemos verificar nos exercícios:

> 1. Obtenha de um jornal ou de outra fonte semelhante seis exemplos de informações apresentadas em forma de matriz.
> 2. Um vetor-linha com três elementos pode ser usado para tabelar a idade, altura e peso de uma pessoa.
> a. Dê um vetor-linha que indique sua idade, altura e peso.
> b. Sugira quando pode ser útil empregar um tal vetor. (p. 519).

No tópico seguinte, os autores definem igualdade de matrizes da seguinte maneira: "Duas matrizes A e B são iguais, A = B, se, e somente se, elas têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais". (p.521). Após apresentar alguns exemplos de matrizes iguais, são propostos cinco exercícios sobre o tema.

Para definir Adição de Matrizes, os autores utilizam como exemplo a soma de números complexos, para somar 3+5i e -2+4i, somamos suas componentes reais e suas componentes imaginárias separadamente:

$$(3+5i)=(-2+4i)=(3+(-2))+(5+4)i=1+9i$$

Tal soma pode ser representada através de vetores, ou seja, a soma de números complexos pode ser encontrada adicionando elementos correspondentes:

$$\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\9\end{bmatrix}$$

Dizemos que duas matrizes são conformes para a adição, quando elas forem de mesma ordem, além disso, temos que a matriz resultante tem ordem igual à ordem das duas parcelas somadas.

Assim como nos números reais o "(...) 0 é o <u>elemento identidade ou elemento neutro para adição</u> em $\Re$. Na álgebra das matrizes, as matrizes cujos elementos são todos nulos desempenham um papel correspondente" (p.524).

> Teorema 17-1. Se as matrizes A e B são conformes para a adição, então elas satisfazem a propriedade comutativa da adição: $A+B=B+A$.
> Teorema 17-2. Se as matrizes A, B e C são conformes para a adição, então elas satisfazem a propriedade associativa para a adição: $A(B+C)=(A+B)+C$.
> Teorema 17-3. Se A e B são matrizes $m\times n$, e $\underline{0}$ é a matriz nula $m\times n$, então:
> a. $A+(-A)=\underline{0}$
> b. $-(-A)=A$
> c. $-\underline{0}=\underline{0}$
> d. $-(A+B)=(-A)+(-B)$. (p.525-527).

Após apresentar e demonstrar os teoremas acima, o quarto tópico é finalizado com 14 exercícios sobre a adição de matrizes e suas propriedades.

No tópico cinco é apresentada uma conclusão sobre o estudo de adição de matrizes, onde os autores afirmam que não será necessário estudar o conteúdo, pois "(...) até o ponto em que somente adição e subtração estão sendo consideradas, a álgebra das matrizes é exatamente igual à álgebra comum dos números" (p.530).

Assim como ao somar números definimos 2x como x+x, a soma de duas matrizes iguais pode ser considerada como o produto de um número por uma matriz.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Após definir o produto de uma matriz por um número é enunciado o seguinte teorema:

Teorema 17-4: Se A e B são matrizes m$\times$n e x e y são números, então

a. $x(yA) = (xy)A,$

b. $(x+y)A = xA + yA,$

c. $(-1)A = -A,$

d. $x(A+B) = xA + xB,$

e. $x\underline{0} = \underline{0}$

f. $0A = \underline{0}.$ (p.533)

Em seguida os autores apresentam alguns exemplos e exercícios de equações matriciais envolvendo adição, subtração e multiplicação por um número.

O tópico sobre Multiplicação de Matrizes é iniciado com um exemplo prático onde a partir de um problema sobre a produção mensal de um determinado produto, o conceito de multiplicação entre matrizes é deduzido.

Os autores adotam uma descrição para o processo utilizado, sendo esse: "Multiplicar linha por coluna", ou seja, "(...) a regra geral de multiplicação de duas matrizes é multiplicar elementos de uma linha pelos elementos correspondentes de uma coluna e em seguida somar os produtos" (p.538).

Duas matrizes A e B são denominadas matrizes conformes para a multiplicação, quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas B, assim AB possui o mesmo número de linhas de A e o número de colunas de B.

O produto entre duas matrizes é, então, definido:

> Sejam $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times p}$ e $B = \lfloor b_{jk} \rfloor_{p \times n}$ matrizes de ordem m×p e p×n, respectivamente. O produto AB é a matriz de ordem m×n, onde o elemento na i-ésima linha j-ésima coluna é a soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B. (p.541)

Os autores apresentam, também, a notação de produto entre duas matrizes através da notação de somatório, ou seja:

$$AB = [a_{IJ}]m \times p[b_{jk}]p \times n = \left[\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}\right)\right] m \times n = c_{ik}\ m \times n$$

Em seguida é apresentado um "Conjunto de Problemas" sobre o tema. No tópico seguinte são trabalhadas, a partir das diferenças entre a álgebra comum[8] e álgebra das matrizes, algumas Propriedades da Multiplicação de Matrizes.

São destacadas diversas diferenças entre a álgebra comum e a álgebra das matrizes, dentre elas a lei comutativa, ou seja, na multiplicação entre dois números temos: $\mathrm{xy} = \mathrm{yx}$, propriedade que nem sempre é válida para o produto entre duas matrizes.

Além disso, na álgebra comum temos que $xy = 0$, implica em $x = 0$ ou $y = 0$, na álgebra das matrizes podemos obter uma matriz nula através do produto de duas matrizes não nulas.

Para as matrizes não vale a afirmação que $xx = a$ possui apenas duas raízes quadradas. Por exemplo, a matriz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, possui as quatro raízes quadradas abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

---

[8] Termo utilizado pelos autores.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Além dessas, temos que para qualquer x diferente de zero a matriz: $\begin{bmatrix}0 & x\\ \frac{1}{x} & 0\end{bmatrix}$ também é raiz de I, assim, I possui um número infinito de raízes.

Para finalizar o estudo são propostos oito problemas sobre as propriedades de multiplicação de matrizes e, em seguida, são apresentadas como conclusão do tópico anterior, algumas propriedades que valem tanto para álgebra comum como para a álgebra das matrizes, dentre elas:

- $\mathrm{A}(\mathrm{B}C)=(\mathrm{AB})C$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(B+C)A = BA + CA$

Após apresentar exemplos das propriedades acima, são apresentadas demonstrações das mesmas.

Para finalizar o nono tópico os autores apresentam o conceito de matriz identidade para a multiplicação, ou seja, existe uma matriz I que tem o mesmo papel do número 1 na multiplicação dos números reais.

A matriz identidade ou unidade é a "(...) matriz quadrada $\lfloor e_{ij} \rfloor$ n$\times$n tal que e_{ij} = 1 para todo i=j e e_{ij}=0 para todo i$\neq$j" (p.558) e $IA = A = AI$.

Para finalizar o estudo geral sobre as matrizes os autores apresentam um pequeno resumo sobre os temas apresentados.

O capítulo seguinte, "A álgebra das matrizes 2×2", é dividido em oito tópicos: Introdução; O Anel das Matrizes 2×2; Unicidade do Inverso Multiplicativo; O inverso de uma Matriz de Ordem 2; A Função Determinante; O Grupo das Matrizes Inversíveis; Um Isomorfismo entre Números Complexos e Matrizes; e Álgebra.

O capítulo é iniciado com uma breve introdução sobre o conceito de conjunto, corpo e anel. Nesse capítulo é explorado o problema da divisão no conjunto das matrizes, sendo, então, limitado o estudo ao subconjunto das matrizes de ordem dois.

O subconjunto das matrizes de ordem dois é representado por M. Temos, portanto que o conjunto M não é um corpo, pois não satisfaz a propriedade comutativa para a multiplicação. Entretanto, os autores demonstram que esse conjunto é um anel em relação à adição e à multiplicação.

No terceiro tópico, temos a definição de inverso multiplicativo para uma matriz A$\in$ M, ou seja, existe $A^{-1}\in$ M tal que: $AA^{-1} = I = A^{-1}A$, entretanto não são todas as matrizes que possuem inverso multiplicativo, assim como o número zero, a matriz nula também não tem inverso. Ainda nesse tópico, é demonstrado que se o inverso de A existe, então ele é único.

Os autores encontram a inversa de uma matriz cujos elementos são números específicos e após encontrar o inverso dessa matriz, aplicam o mesmo processo a uma matriz com elementos genéricos, deduzindo, assim, o método para encontrar a inversa de uma matriz qualquer. Após multiplicar duas matrizes genéricas A e B e igualar a uma matriz identidade, os autores chegam a quatro equações e a partir dessas equações concluem que: “Se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem um inverso, então $h = ad - bc \neq 0$, e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{h} & \frac{-b}{h} \\ \frac{-c}{h} & \frac{a}{h} \end{bmatrix}$ (p. 581)”.

Conforme podemos perceber, a existência do inverso de uma matriz depende do valor da expressão $ad - bc$. Tal expressão é representada através da função: $\delta(x) = ad - bc$, e denominada função determinante da matriz X.

Em seguida são apresentadas e demonstradas as propriedades da função δ (determinante da matriz). Dentre elas:

- $\delta(AB) = \delta(A)\ \delta(B)$
- $\delta(A^{-1}) = \dfrac{1}{\delta(A)}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

Após demonstrar as propriedades acima, são propostos oito problemas sobre o conteúdo através dos quais, outras propriedades da função determinante serão descobertas.

No sexto tópico os autores dividem o conjunto das matrizes M em dois subconjuntos, o conjunto das matrizes 2×2 que não têm inversas e as matrizes 2×2 inversíveis, sendo este último designado pelo símbolo M. Ainda nesse tópico os autores demonstram que M_i é um grupo.

Devido à importância do conceito de grupo na matemática os autores abordam o conceito, exemplos e propõe 11 exercícios sobre tema.

O capítulo é finalizado com algumas considerações sobre o conceito de álgebra:

> (...) álgebra é um sistema que tem duas operações binárias, chamadas ”adição“ e “multiplicação”, e também tem uma “multiplicação por um número” o que a torna ao mesmo tempo um anel e um espaço vetorial (p.605).

Dando continuidade ao estudo, no capítulo seguinte, são apresentadas relações entre Matrizes e Sistemas Lineares.

Dentre as várias características da obra, destacamos que o tópico de matrizes é abordado no terceiro volume do livro, publicado para o terceiro ano do colegial, diferentemente dos livros analisados até então, que indicam o estudo de Matrizes para o segundo ano.

Além disso, ressaltamos a preocupação dos autores em facilitar o estudo, relacionando o conteúdo com o cotidiano dos alunos, através de exemplos e exercícios práticos que podem ser aplicados em seu dia-a-dia e através de relações feitas entre a álgebra comum, já conhecida pelos alunos, e a álgebra das matrizes, que esta sendo apresentada a eles.

Vale ressaltar, também, que a cada tópico estudado é proposto um “Conjunto de Problemas” sobre o tema apresentado, o que, a nosso ver, facilita a aprendizagem do conteúdo.

Destacamos, ainda, a ênfase dada às estruturas algébricas como grupo, corpo e anel. Pode-se perceber que a intenção dos autores não era apenas introduzir esses conceitos, mas também apresentar a álgebra dos conjuntos, tópico que com a Matemática Moderna foi incluso nos estudos do Ensino Secundário.

Livro: Biblioteca Moderna de Matemática
Autor: Irmãos Maristas

Edição: 2ª

Ano da edição: [1966]

Editora: FTD

Nível de Ensino: Ciclo Colegial e Admissão às Escolas Superiores.

O livro Biblioteca Moderna de Matemática, publicado pelos Irmãos Maristas para alunos do ciclo colegial e para a admissão às Escolas superiores é dividido em dois tombos. No primeiro, o estudo é dividido em três partes que abordam os conteúdos de Cálculo Algébrico, Equações do 2º grau e Logaritmos – Juros compostos – Anuidades. No segundo tombo os autores continuam o estudo sobre Logaritmos – Juros compostos – Anuidades, que não foi finalizado no tombo anterior, e apresentam os temas de Análise Combinatória – Binômio e Aplicações determinatórias, Limites – Sucessões – Séries, Derivadas e Funções e Teoria de Equações Algébricas.

O tópico sobre determinantes é abordado na parte dedicado ao estudo de Análise Combinatória, sendo o tema do segundo capítulo desse item. O capítulo sobre determinantes é, ainda, dividido em tópicos, enumerados do 442 ao 482.

O capítulo dedicado ao estudo dos Determinantes é iniciado com alguns princípios gerais sobre o conteúdo, destacando a sua importância e aplicabilidade para a análise algébrica e para a geometria analítica. Segundo os autores "O estudo de algoritmos, regras práticas, para simplificar os cálculos de eliminação de um sistema de equações lineares com n incógnitas, levou à teoria dos determinantes." (p. 359)

No segundo tópico do capítulo os autores apresentam o conceito de permutação e inversão, para em seguida definir determinantes como "(...) a soma algébrica de todos os produtos que se podem efetuar, tomando-se em cada linha e em cada coluna como fator, um elemento e um só (...)" (pag. 361).

Os autores definem, ainda, os números como os elementos do determinante e o quadro desses números como a matriz e representam um determinante colocando a matriz dos seus elementos entre dois traços verticais.

Utilizando o conceito de permutação e inversão os autores mostram como desenvolver um determinante, permutando as letras do termo principal, e, em seguida, apresenta a Regra de Sarrus, seguida de dois exemplos.

No segundo parágrafo desse capítulo são apresentadas, como teoremas, as seguintes propriedades dos determinantes:

- Teorema de Becker: Um determinante não se altera, quando se permuta uma linha pela coluna de mesma ordem.
- Teorema de Bezout: Num determinante, trocando-se uma pela outra, duas linhas ou duas colunas, o determinante muda de sinal.
- Um determinante é nulo, quando tem duas linhas ou duas colunas idênticas.
- Um determinante é uma função do 1º grau em relação aos elementos de uma linha ou de uma coluna.
- Um determinante pode sempre ser desenvolvido segundo os elementos de uma linha ou de uma coluna.
- Multiplicando-se ou dividindo-se por um mesmo número todos os elementos de uma mesma linha ou de uma mesma coluna de um determinante, ele é multiplicado ou dividido por este número. (p.364 – 366).

No terceiro parágrafo, os autores abordam o tema de determinantes menores, definindo determinante menor como o determinante que se obtém suprimindo-se uma linha e uma coluna de um determinante qualquer, sendo, inclusive, apresentado o Teorema de Laplace nesse parágrafo.

Para finalizar, os autores utilizam, no quarto e último parágrafo, todos os conceitos e propriedades dos determinantes estudados nos três parágrafos anteriores para resolver sistemas lineares, objetivo que fica claro desde o início do capítulo.

Vale ressaltar que durante a apresentação da teoria, apesar de apresentar exemplos, os autores não propõem nenhum exercício para os estudantes, sendo esses apresentados no final da obra, com o título “Exercícios de Álgebra”, a lista apresentada é dividida por conteúdo estudado, sendo propostos 37 exercícios sobre determinantes.

Para nossa pesquisa, destacamos que apesar de ser uma obra posterior ao MMM, a obra possui características dos livros anteriores ao movimento, dentre elas a ênfase no estudo de determinantes, a apresentação do conceito de determinantes a partir de permutação e a definição dada à uma matriz.

Livro: Matemática: Curso Colegial Moderno

Autores: Scipione Di Pierro Neto; Luiz Mauro Rocha; Ruy Madsen Barbosa.

Edição: não consta

Ano de publicação: 1968

Editora: IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas.

Nível de Ensino: 2ª Série Colegial

A obra "Matemática: Curso Colegial Moderno" foi publicada pelos professores Scipione Di Pierro Neto, professor do Colégio Rio Branco e professor titular de Matemática e Instrutor de Prática de Ensino da FFCL da USP, Luiz Mauro Rocha, professor de Cálculo Infinitesimal da FEI e da FFCL da Fundação Santo André e da Escola Politécnica da USP e professor do Colégio Estadual de São Paulo e Ruy Madsen Barbosa, doutor em Matemática pela Universidade Católica de Campinas, livre-docente de Matemática da FFCL de Araraquara e professor do ensino secundário oficial do Estado de São Paulo.

O 2º volume do manual desenvolvido para a 2ª série do colegial, em 1968, é dividido em quatro partes. Na primeira, temos o estudo de Seqüências e Séries, Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas. A segunda parte é dedicada ao estudo de Logaritmos Decimais, seguido, na terceira parte, pelo Estudo de Matrizes, Sistemas Lineares e Sistemas não Lineares e para finalizar o livro, na quarta parte, são temas de estudo os conteúdos de Geometria, Superfícies, Corpos Redondos e Poliedros.

No início da obra há um pequeno texto de apresentação no qual os autores destacam os conteúdos que serão abordados e declaram que neste volume do manual foi dado "(...) prosseguimento ao plano didático, de acordo com as modernas técnicas e tendências observadas em países e autores pioneiros na renovação do ensino da matemática."

Ainda no texto de apresentação, os autores comentam sobre a inclusão do estudo de matrizes no ensino secundário: "O estudo das matrizes no curso secundário constitui novidade nos nossos programas, sendo no entanto justificável a sua introdução, em nível elementar, dadas as suas amplas aplicações, principalmente nos sistemas lineares."

O capítulo V, dedicado ao estudo das matrizes, é dividido em duas partes - “A” e “B” - intituladas, respectivamente, “Elementos de Matrizes” e “Operações com Matrizes”.

A parte “A”, dividida em seis tópicos, é iniciada com uma explicação simples sobre o conceito de matrizes:

> Quando dispomos números numa tabela retangular, colocando-os ocupando o cruzamento de uma linha e uma coluna, dizemos que formamos uma MATRIZ. (...) Usa-se, no entanto, colocar a tabela entre colchetes [], outros usam parêntesis () ou duas barras verticais de cada lado $\| \ \|$. (p. 111).

Dando continuidade ao estudo, são apresentadas a definição de elementos e ordem de uma matriz, de matriz linha e de matriz coluna. Os autores finalizam o tópico definindo matriz como “(...) uma função que associa aos pares ordenados (r; s) os valores a_{rs}; e, onde r e s são inteiros positivos tais que r é menor ou igual ao número de linhas e s é menor ou igual ao número de colunas” (p. 112).

O tópico seguinte apresenta uma aplicação de matrizes, sendo, então, proposto pelos autores que em algumas matrizes sejam colocados indicações que possam auxiliar os alunos na interpretação da mesma. Por exemplo, para representar a matriz duma classe que tem 3 rapazes louros, 6 morenos e um preto; 2 moças louras, 9 morenas e uma ruiva, utilizamos a matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} L & M & P & R \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ M \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nos tópicos seguintes são apresentadas as definições de igualdade entre matrizes e algumas matrizes que possuem propriedades especiais: Duas matrizes são iguais “(...) quando e somente quando os elementos que ocupam posições iguais são iguais” (p113), uma matriz nula “(...) é a que possui todos elementos nulos” (p.113), indicada por $\overline{O}$, uma matriz diagonal é a “(...) matriz quadrada que possui todos os elementos nulos exceto aqueles de índices iguais (...)”, matriz escalar “(...) é matriz diagonal e que possui os elementos não nulos iguais (...)” e matriz transposta “A transposta de uma matriz A é uma matriz em que o elemento que ocupa a posição (r; s) é igual ao elemento da matriz A que ocupa a posição (s; r)” (p.114).

A primeira parte do capítulo sobre matrizes é finalizada com uma lista de 12 exercícios sobre os conceitos básicos de matrizes.

Na segunda parte do capítulo, “Operações com Matrizes”, são apresentadas, em 11 tópicos, as operações de adição e multiplicação entre matrizes e a multiplicação de uma matriz por um número real.

Após definir adição de matrizes e destacar que a soma de matrizes é definida apenas para matrizes de mesma ordem, são apresentados alguns exemplos numéricos e algumas propriedades dessa operação, dentre elas a comutativa, a associativa, a existência de elemento neutro e de elemento inverso. Além de enunciar as propriedades, os autores apresentam alguns exemplos numéricos de sua aplicação e suas demonstrações.

No tópico seguinte é apresentada a definição de Subtração entre matrizes, sendo que esta, assim “(...) como os números reais, não goza da comutatividade, associatividade e da existência do elemento neutro, exceto da existência do neutro pela direita” (p.122).

A Multiplicação de matrizes é definida a partir do conceito de transformação de variáveis, por exemplo:

Considere:

$$\begin{matrix} x = 3z + 2w \\ y = 8z + 4w \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} t = 5x + 9y \\ u = 6x + 7y \end{matrix}$$

Temos que A e B são matrizes dos coeficientes das transformações acima:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} e \; B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Substituindo na transformação B os valores de x e y dados pela transformação da matriz A, obtemos:

$$t = 5(3z + 2w) + 9(8z + 4w) = (5.3 + 9.8)z + (5.2 + 9.4)w$$
$$u = 6(3z + 2w) + 7(8z + 4w) = (6.3 + 7.8)z + (6.2 + 7.4)w$$

Entretanto essa transformação pode ser feita de forma direta, resultando em uma só transformação dada pela matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 5.3 + 9.8 & 5.2 + 9.4 \\ 6.3 + 7.8 & 6.2 + 7.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 & 46 \\ 74 & 40 \end{bmatrix}$$

Sendo, portanto, a matriz C denominada Transformação ou Matriz Produto e indica-se $\mathrm{C = B.A}$.

Os autores definem a soma algébrica dos produtos dos elementos de uma linha da matriz B, por uma coluna, correspondente, da matriz A como Produto Interno. Assim, o “(...) produto de uma matriz por outra é a matriz cujos elementos são os Produtos Interiores correspondentes às suas posições” (p.125).

Após definir o produto entre matrizes, os autores dão um “aviso” que para ter a operação de multiplicação o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda.

Através de um contra-exemplo os autores mostram que a propriedade comutativa não é válida para a multiplicação entre matrizes, entretanto, demonstram, também, que a multiplicação entre matrizes é associativa e possui elemento neutro.

A demonstração da propriedade associativa é realizada de duas maneiras. Na primeira, considerada mais fácil para o aluno, os autores desenvolvem a multiplicação entre três matrizes genéricas de ordem não elevadas, mostrando assim que a equação $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ é valida e uma segunda demonstração, considerada pelos autores como demonstração rigorosa, é feita com o uso do símbolo de somatório.

Uma matriz escalar cujos elementos não nulos são iguais à unidade, é denominada matriz identidade, indicada por I, sendo que para toda matriz A, $I \times A = A \times I = A$, ou seja, I é o elemento neutro da multiplicação entre matrizes.

O capítulo seguinte, “Sistemas Lineares”, é dividido em seis partes, “A”, “B”, “C”, “D”, “E” e “F”, intituladas, respectivamente: “Sistemas Lineares”, “Determinantes”, “Propriedades”, “Resolução de Sistemas Lineares $n \times n$ por determinantes”, “Resolução de Sistemas $n \times n$ por Inversão de Matrizes” e “Resolução de Sistemas por Triangulação”.

Inicialmente, para resolver um sistema linear 2×2, os autores utilizam a representação geométrica das duas equações do sistema, sendo, portanto, o ponto de intersecção entre as duas retas formadas a resolução do sistema.

Além disso, com base na teoria dos conjuntos, os autores utilizam o conceito de intersecção entre conjuntos, para determinar se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

A parte “B” é iniciada com uma definição recorrente dos Determinantes:

Dada uma matriz $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n \times n}$, definimos:

a) Para $n = 1$

$\mid A \mid = a_{11}$

b) Para n › 1

$\mid A \mid = a_{11}\left|A^{1;1}\right| - a_{21}\left|A^{2;1}\right| + a_{31}\left|A^{3;1}\right| \cdots (-1)^{n+1} a_{n1}\left|A^{n;1}\right|$, onde $\mid A^{i;j} \mid$ significa determinante da matriz A quando se suprime a linha i e a coluna j, denominada Matriz Reduzida em Cruz. (p.141)

Assim, utilizando a parte $b)$ da definição temos que o determinante de uma matriz de segunda ordem é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{21}|a_{12}|$$

Mas, pela parte $a)$ temos que $|a_{22}| = a_{22}$ e $|a_{12}| = a_{12}$, logo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Após definir determinantes, os autores apresentam uma tabela com sete observações sobre o conteúdo, entre elas destacamos que “(...) quando estamos indicando o cálculo, diz-se que o determinante está sendo desenvolvido ou expandido” e “(...) o estudante observa que para resolver determinantes de terceira ordem, recorremos aos de segunda, para os de quarta recorremos aos de terceira e assim sucessivamente (...)” (p. 142).

Em seguida é apresentado a Regra Prática para desenvolver determinantes de 3ª ordem. Os autores adotam a disposição onde ao lado da terceira coluna, repetem-se as duas primeiras e destacam, entretanto, que de maneira análoga, o determinante de 3ª ordem, pode ser desenvolvido colocando abaixo da terceira linha, as duas primeiras, sendo a verificação desta última deixada a cargo dos estudantes.

No terceiro tópico são apresentadas algumas propriedades que podem facilitar o cálculo dos Determinantes, dentre elas: expansão por qualquer coluna, da matriz transposta, dos elementos nulos, da troca de filas, das filas iguais, da multiplicação e da adição de filas. Para demonstrar a propriedade das transpostas os autores utilizam demonstração por indução, destacando que o estudo dessa demonstração é optativo.

Em seguida é utilizado o conceito e propriedades de determinantes apresentadas no tópico anterior para resolver Sistemas Lineares $n \times n$, sendo esse processo denominado Regra de Cramer.

Para inverter uma matriz são apresentados dois processos, o primeiro através de determinantes e o segundo a partir da resolução numérica de um sistema.

Além da resolução de sistemas por determinantes e matrizes inversas é apresentado o método de resolução por Triangulação:

> O processo procura anular os coeficientes das variáveis, de tal maneira que se obtenha a matriz do sistema triangular, isto é, abaixo da diagonal os elementos são nulos e, depois, por processo retroativo, determina-se por substituição os valores das variáveis. (p. 155).

Finalizando o capítulo são propostos 22 exercícios e três testes. Os exercícios exigem que os alunos utilizem todas as técnicas apresentadas para resolver sistemas lineares: graficamente, por determinante, por matrizes inversas e por triangulação, além disso, são propostos exercícios sobre determinantes, suas propriedades e matrizes inversas. Os exercícios são seguidos por suas respostas.

Consideramos pertinente destacar que os autores se preocupam em facilitar o estudo dos alunos, apresentando de forma concisa, simples e fácil o conteúdo.

Quanto aos aspectos de apresentação destacamos que os autores denominam como ilustração os exemplos numéricos apresentados e no decorrer do texto são inseridos alguns quadros com definições, avisos, sugestões e conclusões, o que, parece-nos ser uma estratégia para chamar a atenção dos alunos, tornando o estudo mais atrativo.

O método utilizado para definir determinantes, o fato dos autores apresentarem os tópicos sobre Determinantes e Matrizes Inversas no capítulo de Sistemas Lineares, sendo que, geralmente, esses conteúdos são apresentados no capítulo sobre Matrizes e a abordagem feita aos Sistemas não Lineares, conteúdo pouco abordado em livros publicados para o ensino secundário, são fatores que diferenciam esse manual da maioria dos que já estudamos.

Entretanto, assim como na maior parte dos manuais analisados, neste, o conteúdo de Determinantes é apresentado devido a sua importância e aplicabilidade na resolução de sistemas lineares.

Além disso, vale ressaltar, que para apresentar conclusões sobre o número de soluções que um sistema pode assumir, os autores utilizam noções de intersecção entre conjuntos, tópico incluso no ensino secundário com a Matemática Moderna, característica, que, juntamente com os aspectos de apresentação do texto, confirmam a relação entre a elaboração do manual e as modernas técnicas de renovação do ensino da matemática que os autores se referiam no início da obra.

Livro: Moderno Curso de Matemática

Autor: Manoel Jairo Bezerra

Edição: não consta

Ano de publicação: 1968

Editora: Companhia Editora Nacional – São Paulo

Nível de Ensino: 1º ano dos cursos Clássico e Científico.

O livro "Moderno Curso de Matemática", elaborado pelo professor Manoel Jairo Bezerra para o 1º ano dos cursos Clássico e Científico, aborda os conteúdos propostos pelo moderno programa de Matemática para a Escola Secundária. Assim, o livro é dividido em oito capítulos com os seguintes temas: Conjuntos, Coordenadas Cartesianas, Relações, Funções, Leis de Composição, Números reais e números complexos, Estruturas, Matrizes, Sistemas lineares e Geometria no Espaço.

Inicialmente temos um texto de apresentação onde o autor explica que devido ao caráter experimental do ensino da Matemática Moderna, o livro foi publicado em três volumes, um para cada ano do 2º ciclo. Em seguida, é apresentada uma sugestão do número de aulas que devem ser utilizados para trabalhar cada conteúdo abordado no manual, sendo que para o estudo de Matrizes o autor propõe sete aulas. Além disso, antes de iniciar o primeiro capítulo, o autor apresenta o significado dos símbolos matemáticos utilizados na obra.

O capítulo 8, dedicado ao estudo de Matrizes, é dividido em sete tópicos. O primeiro deles, intitulado "Preliminares", é dividido em três subitens que apresentam o objetivo, a importância e a noção intuitiva de matrizes.

No segundo tópico é apresentada a seguinte definição para Matriz:

> Seja $I = \{1,2,\cdots,m\} \subset \mathrm{N}$ e $J = \{1,2,\cdots,n\} \subset \mathrm{N}$ e X um conjunto não vazio.
> Chama-se matriz de ordem $m \times n$ (que se lê "m por n") a toda aplicação de $I \times J$ em X.
> Geralmente, representa-se uma matriz por uma letra maiúscula e a imagem de cada par $(i, j) \in I \times J$ por uma letra minúscula, correspondente à letra maiúscula que representa a matriz, afetada de dois índices.

> Assim, se $A: I \times J \to X$ é a matriz considerada, então: $A((i, j)) = a_{ij}$ *ou* $A: (i, j) \to a_{ij}$ (p. 83).

Após definir e apresentar a notação de uma matriz o autor define matrizes iguais, matriz quadrada, diagonal principal, matriz linha, matriz coluna, matriz transposta, matriz simétrica, matriz nula e matriz oposta.

No tópico seguinte, Adição de Matrizes, são apresentadas, além do conceito, as seguintes propriedades da soma de matrizes: fechamento, associativa, comutativa, elemento neutro e inverso, sendo, então, concluído que o conjunto de matrizes de ordem $m \times n$, forma uma estrutura de grupo abeliano.

A partir da definição de soma de matrizes o autor apresenta, no tópico seguinte, a definição e dois exemplos de diferença de duas matrizes.

Prosseguindo o estudo temos a definição de produto de um número por uma matriz: "Chama-se matriz produto de um número α por A, e indica-se por αA, a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ definida por: $\forall (i, j) \in I \times J, b_{ij} = \alpha a_{ij}$." (p.87). Para finalizar o tópico o autor apresenta as propriedades do produto de um número por uma matriz.

O tópico seguinte é iniciado com a definição de produto de uma linha da matriz A por uma coluna de uma matriz B: seja L_i uma linha da matriz A e C_j uma coluna da matriz B, temos que $L_i C_j = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$. Em seguida, o produto entre as matrizes A e B é definido pelo produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B, ou seja, o elemento da matriz $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ é definido por $c_{ij} = L_i C_j$. Após apresentar quatro exemplos numéricos de produto entre matrizes, o autor apresenta algumas observações referentes a essa operação:

> **1ª** Para que exista AB, é necessário que o número de colunas da primeira matriz A seja igual ao número de linhas da segunda matriz B.
>
> **2ª** Existindo o produto da matriz A de ordem $m \times p$ pela mátria B de ordem $p \times n$, pode não existir o produto da matriz B pela matriz A. Basta para isso, que $m \neq n$.
>
> **3ª** Se as matrizes A e B são quadradas, de mesma ordem n, existem sempre AB e BA, mas, em geral, $AB \neq BA$. (p.90)

A matriz I_n cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos, é denominada matriz identidade ou unidade para a multiplicação.

A soma e a diferença entre matrizes possuem as mesmas propriedades dos números reais, entretanto, em relação ao produto não acontece o mesmo, as principais diferenças destacadas pelo autor são: “o produto de duas matrizes não nulas pode ser uma matriz nula” (p.91) e o produto entre duas matrizes não goza da propriedade comutativa nem da propriedade de cancelamento. Entretanto, tal operação possui a propriedade associativa, distributiva à direita e à esquerda, elemento neutro e elemento nulo.

O sexto tópico é finalizado com a definição de matriz inversa. Representada por A^{-1}, a inversa da matriz A é encontrada através da equação $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Para resolvermos uma equação da forma $AX = B$, a matriz A precisa ter inversa, assim $X = A^{-1}B$.

No último tópico, intitulado “Álgebra das matrizes 2×2”, temos que “(...) o conjunto M das matrizes 2×2 é um anel em relação à adição e à multiplicação” (p.92), sendo a verificação dessa propriedade deixada como exercício aos estudantes.

O capítulo sobre matrizes é finalizado com 10 exercícios, sendo alguns teóricos e outros de aplicações das propriedades e operações apresentadas.

Dando continuidade ao estudo, no capítulo seguinte, o autor apresenta um estudo sobre Sistemas lineares, onde a partir da teoria das matrizes, apresentada anteriormente, o autor apresenta algumas maneiras de solucionar sistemas de equações lineares de ordem $m\times n$. Dessa forma, os autores dedicam um tópico desse capítulo para o estudo sobre determinantes e um para suas propriedades, sendo estes seguido pelo tópico “Resolução de Sistemas Lineares $n\times n$ por Determinantes”.

Consideramos pertinente destacar duas diferenças entre esse livro e os demais que já analisamos: a primeira delas, diz respeito ao momento onde o estudo de matrizes e sistemas lineares são realizados. Neste manual esses temas são abordados no volume dedicado ao 1º ano dos cursos clássicos e científicos, enquanto nos demais manuais o estudo desses tópicos são indicados para o 2º ano. Além disso, destacamos que apesar de abordar matrizes e sistemas lineares, em nenhum momento o autor menciona o conceito de determinantes.

Vale ressaltar que o uso do conceito de função, conjunto, grupo e anel, feito pelo autor para definir matrizes e apresentar suas propriedades, é uma das diferenças marcantes com relação aos anteriores ao Movimento da Matemática Moderna.

Acreditamos que o objetivo do autor ao apresentar um estudo sobre matrizes é utilizá-lo como aplicação na resolução de sistemas lineares, pois, além de apresentar apenas os conceitos básicos do conteúdo, o autor não demonstra nenhuma propriedade ou operação apresentada, deixando tais demonstrações como exercícios para os alunos.

Livro: Introdução à Álgebra das Matrizes
Autor: School Mathematics Study Group
Edição: não consta
Ano de publicação: 1969
Editora: EDART – São Paulo
Nível de Ensino: Ensino Secundário

O livro Introdução à Álgebra das Matrizes, publicado em 1969, foi organizado pelo School Mathematcs Study Group – SMSG – e traduzido para o português pelo professor Lafayette de Moraes.

Esta obra, composta por cinco capítulos, é dividida segundo os temas: Operações com matrizes; A álgebra das matrizes $2x2$; Matrizes e Sistemas Lineares; Representação de Matrizes coluna por vetores geométricos; e Transformação do Plano. Além desses capítulos, no apêndice do manual, os autores propõem alguns exercícios de pesquisa sobre Quaterniões, Álgebras não–associativas; A Álgebra dos subconjuntos; e Análise e síntese das demonstrações.

Segundo os autores, uma das metas desse manual é apresentar a estrutura e alguns tópicos da matemática que serão úteis para alunos que pretendem continuar os estudos em cursos universitários. Apesar de o livro ser produzido para o Ensino Secundário, os autores ressaltam que esta edição experimental do manual não foi utilizada em cursos comuns, embora não explicitem qual a natureza dos cursos em que foram utilizados.

O primeiro capítulo, intitulado "Operações com Matrizes", é dividido em 10 tópicos, nos quais, conforme o próprio título nos revela, os autores apresentam as operações efetuadas com matrizes, tais como: adição, multiplicação de uma matriz por um número e multiplicação entre matrizes. Além disso, os autores nos apresentam um breve texto sobre o desenvolvimento histórico dos números e apresenta as matrizes como uma espécie de número bem sucedida e ressaltando a sua importância, principalmente, para as áreas da ciência e engenharia.

Matriz é "(...) um conjunto retangular ordenado de elementos dispostos em linhas e colunas" (p.3). Neste manual os autores representam uma matriz entre colchetes, sendo esta a única notação apresentada.

Após definir matrizes, os autores definem ordem de uma matriz, sugerindo seis exercícios sobre esses conceitos iniciais, sendo dois deles aplicações de matrizes no dia-a-dia.

No terceiro tópico os autores definem, apresentam exemplos e propõem cinco exercícios sobre igualdade de matrizes: "Duas matizes A e B são iguais, $A = B$, se, e somente se, elas têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais." (p. 7).

Segundo os autores, "(...) para dar ao estudo das matrizes o seu real significado, precisamos definir "soma" e "produto" para matrizes" (p. 9). Dessa forma, os autores definem, no quarto tópico, soma e diferença entre matrizes, apresentando as propriedades (elemento neutro, comutativa, associativa e elemento inverso) e exemplos dessas operações. Para finalizar o tópico, são propostos 14 exercícios sobre igualdade e adição de matrizes, sendo quatro desses exercícios demonstrações dos teoremas (propriedades) apresentados anteriormente.

No quinto tópico são apresentadas algumas conclusões sobre o estudo da adição de matrizes, onde os autores ressaltam que "(...) até o ponto em que somente adição e subtração estão sendo consideradas, a álgebra das matrizes é exatamente igual à álgebra comum dos números." (p.16). A partir dessa afirmação os autores empregam o mesmo procedimento utilizado para resolver equações numéricas para resolver equações matriciais.

Os autores utilizam o conceito de multiplicação de números para definir a multiplicação entre um número e uma matriz. "Se adicionamos duas matrizes iguais, a soma é evidentemente uma matriz onde cada elemento é exatamente o dobro do elemento correspondente nas duas matrizes dadas." (p.18).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2) & 2(3) \\ 2(-1) & 2(0) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com essa nova operação e com suas propriedades estudadas são resolvidos e propostos seis exercícios sobre equações matriciais envolvendo adição, subtração, e multiplicação por um número.

No tópico seguinte, os autores definem a multiplicação de matrizes a partir de um problema simples e prático, enfrentado por uma fábrica de televisões.

“Um elemento do produto AB é achado multiplicando cada um dos p elementos numa linha de A pelo elemento correspondente dentre os p elementos da coluna de B e efetuando a soma”. (p. 24).

Após apresentar a regra e um diagrama que ilustra o processo de multiplicação de matrizes, são apresentados alguns exemplos dessa operação, que é definida formalmente da seguinte maneira:

> Sejam $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxp}$ e $B = \lfloor b_{jk} \rfloor_{pxn}$ matrizes de ordens mxp e pxn, respectivamente. O produto AB é a matriz de ordem mxn, onde o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna é a soma dos produtos obtidos multiplicando os elementos da i-ésima linha de pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.
> (...) O produto AB é a matriz de ordem mxn, dada por
> $$AB = \left[a_{ij}\right]_{mxn}\left[b_{jk}\right]_{pxn} = \left[\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}\right)\right]_{mxn}$$ (p.27-28)

No oitavo tópico são apresentadas algumas diferenças entre a multiplicação de números e a de matrizes: para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa, a segunda diferença entre a multiplicação entre números e a multiplicação entre matrizes é que o produto de duas matrizes não nulas pode resultar em uma matriz nula, a lei do cancelamento para a multiplicação também não é válida para a álgebra das matrizes e tratando-se de números reais temos que a equação $xx = a$ possui no máximo duas raízes, para as matrizes essa propriedade também não é válida, por exemplo, a matriz identidade, possui quatro raízes quadradas diferentes.

Em seguida, no tópico “Propriedades da Multiplicação de Matrizes (Conclusão)”, são apresentadas as propriedades de multiplicação entre números que também são válidas para a multiplicação de matrizes: associativa, distributiva à esquerda e à direita, existência do elemento identidade e nulo.

Esse capítulo é finalizado com 13 exercícios e um texto que resume o conteúdo estudado e apresenta uma breve introdução sobre o inverso multiplicativo para as matrizes, conteúdo que é abordado com mais profundidade nos capítulos subseqüentes.

O segundo capítulo, A álgebra das matrizes $2x2$, é dividido em oito tópicos intitulados: Introdução; O anel das matrizes $2x2$; Unicidade do Inverso Multiplicativo; O inverso de uma matriz de ordem 2; A função Determinante; O grupo das Matrizes Inversíveis; Um isomorfismo entre Números Complexos e Matrizes; e Álgebras.

Esse capítulo é dedicado ao estudo do problema da divisão de matrizes. Para facilitar a discussão sobre esse problema os autores se limitam, inicialmente, ao estudo do subconjunto de matrizes $2x2$.

Para trabalhar com esse conteúdo os autores apresentam, resumidamente, o conceito de grupo, anel e corpo.

O capítulo é iniciado com a definição de conjunto fechado. Em seguida, os autores mostram que o conjunto de matrizes $2x2$ é um anel em relação à adição e à multiplicação e apresentam o conceito de inverso multiplicativo, mostrando a sua unicidade. “Se $A \in M$, então um elemento A^{-1} de M é um inverso de A desde que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$” (p.57).

Os autores ressaltam a importância de desenvolver um método geral para determinar o inverso de uma matriz $2x2$ e a partir de duas matrizes genéricas e da definição de inverso apresentada anteriormente, encontram a seguinte regra para encontrar o inverso de uma matriz:

“Se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tem um inverso, então $h = ad - bc \neq 0$, e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{h} & \frac{-b}{h} \\ \frac{-c}{h} & \frac{a}{h} \end{bmatrix}$.” (p.67).

No quinto tópico é introduzido o conceito da função determinante: “Se $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então $\delta(x) = ad - bc$ é chamado de <u>determinante</u> de X” (p. 70). Após calcular o determinante de algumas matrizes, são apresentadas e demonstradas as seguintes propriedades dessa função: $\delta(AB) = \delta(A)\delta(B)$, $\delta(A^{-1}) = \frac{1}{\delta(A)}$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ao finalizar o tópico os autores ressaltam que “(...) existe uma função determinante associada a cada matriz quadrada, e o fato dela ser diferente de zero é uma condição necessária e suficiente para que a matriz tenha um inverso” (p.74).

No tópico seguinte, os autores definem grupo, apresentam alguns exemplos de grupos de matrizes inversíveis e propõem 11 exercícios sobre esse conteúdo.

Prosseguindo o estudo, no tópico “Um Isomorfismo entre números complexos e Matrizes”, os autores mostram que o sistema dos números complexos pode ser expresso em termos de matrizes e introduzem o conceito de isomorfismos entre dois sistemas numéricos.

Finalizando o segundo capítulo, os autores apresentam um texto sobre o conceito de álgebra e sobre álgebras que possuem a mesma estrutura, sendo essas denominadas isomorfas.

No terceiro tópico, “Matrizes e Sistemas Lineares”, os autores mostram como utilizar o conceito de matriz para resolver sistemas lineares, ou seja, mostram como representar um sistema linear na forma de matrizes. Em seguida, apresentam os procedimentos que podem ser utilizados para encontrar a solução de um sistema, dentre eles as operações com linhas, a multiplicação de matrizes elementares e o método da triangulação.

No quarto tópico, os autores representam o conjunto das matrizes coluna com dois elementos, ou seja, matrizes do tipo $2x1$, na forma geométrica, as quais denominam vetor coluna de ordem dois.

Os autores defendem que a interpretação geométrica de uma matriz coluna “(...) levará a uma compreensão mais profunda do significado e das implicações dos conceitos algébricos”. (p. 120).

Para realizar este estudo, os autores apresentaram além da álgebra de vetores – adição de vetores, produto escalar e a sua representação geométrica –, os conceitos de espaço vetorial e dependência linear.

Dando continuidade ao estudo de vetores, no quinto tópico, os autores abordam o conceito de transformações no plano, relacionando as funções e transformações geométricas, apresentando as matrizes transformações, as transformações lineares e biunívocas, os vetores e valores característicos e o conceito de rotação e reflexão.

O manual é finalizado com alguns exercícios de pesquisa que, segundo os autores, servem como teste para conhecer a capacidade matemática dos alunos. Esses exercícios “(...) são essencialmente do “tipo pesquisa” destinados a apresentar aspectos de teoria e prática da Álgebra das Matrizes não contidos no texto.” (p.187).

Conforme podemos perceber, nesse manual, apesar do seu uso ser indicado para cursos de nível secundário, são abordados conteúdos de matemática que, normalmente, são trabalhados somente em cursos universitários. Tal característica se relaciona com os propósitos do Movimento da Matemática Moderna, que defendia o ensino das estruturas matemáticas no Ensino Secundário.

Vale ressaltar, que os autores comparam a álgebra das matrizes com a álgebra dos números, buscando relacionar o conteúdo que está sendo estudado com um conteúdo que os alunos já conhecem, facilitando, assim, a aprendizagem do mesmo. Além disso, outro fator que facilita a fixação do conteúdo é o “Conjunto de Problemas” propostos pelos autores ao término de cada tópico estudado

Neste manual, diferentemente da maioria dos analisados em nossa pesquisa, não é dada ênfase ao estudo dos determinantes. Embora os autores abordem o conteúdo, eles não apresentam suas possíveis notações e as técnicas e regras para resolvê-los.

Além disso, vale ressaltar, que a forma de apresentação e os conteúdos abordados nessa obra são os mesmos do terceiro volume da obra “Matemática”, também desenvolvida pelo SMSG, em 1966.

Livro: Abecedário da Álgebra

Autor: Darcy Leal de Menezes

Edição: 8ª Edição

Ano de publicação: 1971

Editora: Livraria Nobel

Nível de Ensino: Ciclo Colegial

A obra “**Abecedário da Álgebra**”, escrita pelo coronel Darcy Leal de Menezes, teve sua oitava edição publicada em 1971. O manual, desenvolvido para alunos do ciclo colegial, é dividido em 16 capítulos que abordam os seguintes conteúdos: Polinômios; Funções; Trinômio do 2º grau; Progressões; Função Exponencial; Logaritmos; Equações Exponenciais; Análise Combinatória; Potenciação Algébrica; Determinantes; Números Complexos; Limites; Continuidade; Séries; Derivadas; e Equações Algébricas.

O estudo sobre determinantes é realizado no décimo capítulo, sendo este dividido em três tópicos: Preliminares; Cálculo dos Determinantes e Aplicação dos Determinantes. Para discutir essa teoria o autor utiliza 57 páginas, que são divididas em 44 parágrafos.

Menezes divide o primeiro tópico em cinco parágrafos, nos quais define inversão de permutação, enuncia e demonstra a Regra de Bézout: “Quando se trocam as posições de dois elementos quaisquer de uma permutação, esta muda de sinal.” (p.213), apresenta um pequeno texto sobre a origem dos determinantes, ressaltando que o objetivo de seu estudo é aplicá-lo à resolução de sistemas lineares, define matrizes, determinantes e apresenta suas possíveis notações: notação de Jocobi (representado pela matriz de n^2 elementos, colocados entre simples traços verticais), notação de Cauchy (representado pelo somatório dos termos principais) e notação de Kronecker (o termo principal colocado entre traços verticais).

Segundo o autor uma “(...) matriz retangular de m.n elementos (que podem ser números, expressões numéricas ou algébricas) é o quadro desses elementos dispostos em m linhas e n colunas, entre duplos traços verticais.” (p.215).

Menezes define determinante como:

> (...) a soma algébrica de todos os diferentes produtos obtidos com os elementos de uma matriz quadrada, de sorte que cada produto se apresenta apenas com um elemento de cada linha e da cada coluna, afetado do sinal correspondente à classe de permutação formada. (p.216)

O segundo tópico, Cálculo dos determinantes, é dividido em seis partes, sendo essas divididas em 28 parágrafos.

Inicialmente Menezes apresenta um texto sobre o que significa desenvolver um determinante: “Desenvolver (ou calcular) um determinante é passá-lo de um dos aspectos simbólicos sob o qual se apresentar, para o de um polinômio cujo valor numérico é o valor do determinante”. (p.217)

Regra Geral Espontânea

Para obter-se o desenvolvimento de um determinante dado:

1.º - Realizar todas as permutações dos índices inferiores do termo principal, considerando-as com os sinais correspondentes à sua classe e como produtos dos elementos que delas participam.

2.º - Somar algebricamente todos esses produtos. (p. 217)

Em seguida, é apresentada a regra para desenvolver determinantes de 2ª ordem e a regra de Sarrus, para determinantes de 3ª ordem.

No tópico seguinte Menezes ressalta a impraticabilidade de desenvolver determinantes com grau maior que quatro utilizando o processo espontâneo e apresenta a definição de menor, menor complementar, complemento algébrico e adjunto de um determinante.

Na terceira parte são enunciadas e demonstradas as 14 propriedades sobre os determinantes:

- O desenvolvimento de um determinante tem número igual de termos positivos e negativos.
- Um determinante fica multiplicado por (-1) quando se trocam, uma pela outra, duas linhas (ou colunas).
- Um determinante não se altera quando são trocadas ordenadamente todas as linhas pelas colunas.
- O determinante que tem duas linhas (ou colunas) iguais, é nulo.
- Multiplicando-se (ou dividindo-se) todos os elementos de uma linha (ou coluna) por uma certa quantidade, o determinante fica multiplicado (ou dividido) por essa mesma quantidade).
- Quando todos os elementos de uma linha (ou coluna) são nulos, o determinante é nulo.
- Quando todos os elementos de uma linha (ou coluna) são proporcionais aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), o determinante é nulo.
- Qualquer determinante pode ser transformado em outro equivalente que tenha todos os elementos de uma linha (ou coluna) iguais a 1.
- Qualquer determinante pode ser transformado em outro equivalente cujos elementos de uma linha (ou coluna) sejam iguais a uma quantidade previamente escolhida.
- Quando se faz um elemento qualquer a_r^s, de um determinante, ocupar o lugar habitual de a_1^1, o determinante fica multiplicado por $(-1)^{r+s}$.
- Todo determinante pode ser desenvolvido segundo os elementos de uma linha (ou coluna); e quando forem nulos todos os elementos de uma linha (ou coluna), exceto um deles, o determinante é igual ao produto deste elemento pelo seu adjunto.
- Quando os elementos situados do mesmo lado da diagonal principal de um determinante são nulos, o desenvolvimento reduz-se ao termo principal.
- Quando todos os elementos de uma linha (ou coluna) forem polinômios, todos de p termos, o determinante dado é igual à soma de p determinantes parciais obtidos com a substituição sucessiva da linha (ou coluna) visada pelos diferentes p termos dos polinômios, na ordem em que se apresentarem.

- Um determinante não se altera quando se somam ou subtraem aos elementos de uma linha (ou coluna), os elementos correspondentes de outra linha (ou coluna) multiplicados por um fator constante. (p. 223 – 226).

Prosseguindo o estudo, o autor enuncia e demonstra o processo de Laplace, o processo de abaixamento de ordem e a regra de Chió para desenvolver determinantes utilizando o conceito de determinantes menores.

Em seguida, Menezes define multiplicação de determinantes de mesma ordem e observa que para determinantes de ordens diferentes é necessário primeiro transformá-los em determinantes semelhantes, por meio de abaixamento da ordem de um deles, para depois multiplicá-los.

O quinto tópico é finalizado com a regra e um exemplo de divisão de dois determinantes.

Regra

1.º Considerar realizada a divisão do determinante D pelo determinante d, de que resultou o determinante quociente q, da mesma ordem de D e d.

2.º Como $D \equiv d$, efetuar o produto do determinante conhecido d pelo determinante que se pretende conhecer, q.

3.º Estabelecer as identidades dos elementos correspondentes do determinante-dividendo D e do determinante-produto dq e, através delas, calcular os valores dos elementos do determinante q. (p.244)

A última parte do segundo tópico é dedicada ao estudo dos determinantes especial de Vandermonde (ou das potências).

No terceiro tópico, Aplicação dos determinantes, Menezes aplica toda a teoria estudada na resolução e discussão de sistemas lineares.

O capítulo é finalizado com 20 exercícios de todos os tópicos estudados, sendo os exercícios 1 ao 13 sobre determinantes e 14 ao 20 sobre sistemas lineares.

Vale ressaltar que, apesar da obra ter sua oitava edição publicada em 1971, não percebemos interferência das idéias defendidas pelo Movimento da Matemática Moderna na abordagem do conteúdo, nem na apresentação do mesmo.

Além disso, uma característica importante da obra é a pequena quantidade de exercícios e exemplos, os quais se concentram exclusivamente ao final do tópico.

Livro: Matemática Aplicada

Autor: Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic

Edição: não consta

Ano de publicação: 1979 e 1980.

Editora: Editora Moderna.

Nível de Ensino: Segundo Grau.

O manual "Matemática Aplicada", escrito pelos professores Trotta, Imenes e Jakubovic, foi dividido em três volumes, sendo o 2º e 3º publicados, respectivamente, em 1979 e 1980.

O 2º volume da obra, dividido em seis capítulos, aborda os seguintes temas: Análise Combinatória; A área de uma superfície; A trigonometria da primeira volta; Geometria Analítica: a reta; Sistemas lineares e Determinantes; e Trigonometria Generalizada.

O capítulo "Sistemas lineares e Determinantes" é dividido, conforme denominação dada pelo autor, em oito itens intitulados: Introdução; Nomenclatura; Determinantes 2×2; Sistemas lineares 2×2 não normais; Determinantes 3×3; Sistemas lineares 3×3 não normais; Sistemas homogêneos; e Comentários Finais.

Inicialmente são apresentados três exercícios simples, onde não há necessidade de empregar a Álgebra para resolvê-los, entretanto, com o objetivo de auxiliar na compreensão dos casos mais complicados e introduzir o tema de estudo desse capítulo, os autores resolvem esses exercícios utilizando ferramentas algébricas.

O primeiro problema é representado com uma equação a duas incógnitas, para resolvê-lo os autores inicialmente "chutam"[9] um valor para uma das incógnitas e obtém o valor da segunda. O problema seguinte é representado com duas equações a duas incógnitas, sendo este, resolvido pelo método de substituição. Por fim, o terceiro exercício, com três equações a duas incógnitas, é resolvido da seguinte maneira: inicialmente os autores "ignoram" a última equação, encontrando uma única solução para as outras duas, após substituir o valor encontrado na terceira equação, os autores concluem que o sistema não possui solução.

---

[9] Termo utilizado pelos autores.

No tópico seguinte é apresentada a definição e exemplos de equações e sistemas lineares: "Sendo a, b, c constantes reais, chamaremos de equação linear nas variáveis x, y a uma equação do tipo: $ax + by = c$. (...) Um sistema em que todas as equações são lineares nas variáveis x, y, chama-se sistema linear nestas variáveis" (p.206).

Para solucionar um sistema, inicialmente, os autores apresentam o método onde "(...) $(\alpha;\beta)$ é uma solução de um sistema nas variáveis x, y se as substituições $x = \alpha$ e $y = \beta$ satisfazerem a cada uma das equações que compõem o sistema" (p. 207). Em seguida é apresentada uma tabela onde são apresentadas as possíveis classificações para um sistema linear: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. Este tópico é finalizado com uma lista de 15 exercícios sobre o conteúdo visto, sendo três deles seguidos por suas resoluções e os demais são demarcados por uma estrela indicando que sua resolução é deixada a cargo do estudante.

O terceiro tópico, "Determinantes 2×2", é iniciado com o estudo da solução de sistema linear 2×2 genérico.

Para encontrar a solução de um sistema linear 2×2 genérico: $\begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases}$, os autores multiplicam os dois membros da primeira equação por b_2 e os da segunda equação por $-a_2$ e ao somar as duas equações eles obtém a seguinte solução para x e y:

$x = \dfrac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}$ e $y = \dfrac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, sendo $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Após apresentar um exemplo numérico o autor apresenta uma maneira de memorizar as fórmulas acima:

> Nas fórmulas obtidas, pode-se notar que os denominadores de x e y são iguais: ambos valem $a_1b_2 - a_2b_1$. Localizaremos, no sistema genérico, os coeficientes que comparecem em $a_1b_2 - a_2b_1$. Para isso, chamaremos de matriz incompleta do sistema a tabela constituída pelos coeficientes das variáveis x e y (...) Olhando para a matriz incompleta e tendo em mente o desejo de obter o valor de $a_1b_2 - a_2b_1$, cria-se um novo conceito que fornecerá, a partir de uma matriz 2×2, o resultado desejado. Esse novo conceito será chamado de determinante 2×2. (p.211)
>
> (...) Desse jeito, na resolução do sistema 2×2, podemos memorizar que os denominadores de x e y são iguais ao determinante da matriz incompleta do sistema. (...) Em termos de memorização, o numerador de x é o determinante da matriz que se obtém substituindo, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes. Da mesma forma, o numerador de y é o determinante da matriz que se obtém substituindo, na

> matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes. (p. 212)

Por fim, os autores apresentam, num quadro com fundo cinza, essa resolução na forma algébrica e a denomina Regra de Cramer. Vale ressaltar que a matriz incompleta é apresentada entre colchetes e o determinante entre duas barras verticais, entretanto, nenhuma observação é feita a respeito dessas duas notações.

O tópico é finalizado com seis exercícios, sendo três que abordam a resolução de sistemas lineares pela Regra de Cramer e três que pedem o cálculo de determinantes.

Quando o determinante da matriz incompleta do sistema for nulo, os autores denominam esse sistema como “Sistemas lineares não normais”, sendo esta característica considerada um sintoma de “anormalidade” do sistema. Quando este sintoma ocorre o sistema poderá ter infinitas ou nenhuma solução.

Da mesma forma, quando o determinante da matriz incompleta é diferente de zero o sistema é denominado sistema normal, sendo esses possíveis e determinados.

Para finalizar o tópico, é apresentado um quadro com um resumo sobre as relações entre o valor do determinante e o número de soluções de um sistema linear e uma lista de exercícios que abordam os fatores que ocasionam o anulamento de um determinante 2×2.

Após apresentar um resumo dos conceitos apresentados, os autores propõem 10 exercícios sobre resolução de sistemas lineares 2×2.

No tópico seguinte é apresentado, a partir da resolução de um sistema linear 3×3, o método para calcular um determinante de ordem 3×3 e a partir da regra de Cramer é feito um estudo semelhante ao realizado para sistemas lineares 2×2.

Por fim, é apresentado o conceito de sistemas lineares homogêneos, que admitem solução nula, ou seja, “(...) todas as variáveis assumem o valor do zero. Assim (0; 0; 0) é a solução do sistema” (p. 225) e nove exercícios, sendo dois deles resolvidos.

Para finalizar o capítulo os autores destacam, no oitavo tópico, “Comentários Finais”, que o estudo foi limitado aos sistemas lineares 2×2 e 3×3, pois esses são os mais comuns encontrados na prática. Entretanto, mesmo com tal afirmação, e sem apresentar um método para resolver sistemas de ordens diferentes, são propostos quatro exercícios para resolver sistemas de ordens 3×2 e 2×4.

O 3º volume é dividido em oito capítulos, conforme os seguintes temas: Probabilidades; Limites e Derivadas; O Volume de um Sólido; As figuras no espaço; Polinômios – Equações Polinomiais (1ª Parte); Números Complexos – Equações Polinomiais (2ª Parte); As cônicas; e Matrizes.

O estudo sobre matrizes é abordado no último capítulo, sendo este, dividido em 20 tópicos: Introdução; Conceito de matriz; Igualdade de matrizes; Adição de matriz; Matriz nula; Matriz oposta; Propriedades da adição de matrizes; Subtração de matrizes; Multiplicação de um número real por uma matriz; Propriedades da multiplicação de um número real por uma matriz; Somatórias; Algumas propriedades das somatórias; Multiplicação de matrizes; Matriz unidade; Propriedades da multiplicação de matrizes; Matriz Transposta; Determinantes – teorema de Laplace e Cauchy; Propriedade relacionando matrizes e determinantes; Matriz Inversa; e Sistema linear normal.

No primeiro tópico, os autores ressaltam que alguns dos temas abordados nos três volumes dessa obra poderiam ser apresentados através de uma abordagem lógico-dedutiva, ou seja, a apresentação desses conteúdos seria sofisticada, formalizada, rigorosa e o mais sucinta possível, além disso, os autores não teriam a preocupação em relacionar a matemática com o cotidiano dos alunos. Para ilustrar esse tipo de abordagem os autores fazem uma apresentação sucinta, utilizando a abordagem lógico-dedutiva, do conteúdo de números complexos, abordado em capítulo anterior.

A abordagem lógico-dedutiva é adotada pelos autores para apresentar o conteúdo de matrizes, por duas razões principais:

> 1ª) Os alunos que, ao concluírem o 2º grau, pretendam se dedicar de forma especializada à Matemática, ingressando nesta área na universidade, vão deparar com freqüência com raciocínios lógico-dedutivos e achamos interessante que então já tenham visto algo nesse sentido;
>
> 2ª) As motivações e aplicações práticas mais interessantes das matrizes são de nível superior, e acreditamos que fogem bastante ao que pretendemos realizar neste curso. (p 342)

O estudo de matrizes é considerado um jogo lógico-dedutivo, onde, através da resolução dos exercícios, os estudantes são convidados a participar desse jogo.

O tópico seguinte é iniciado com a seguinte definição de matrizes: “Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a um; chama-se matriz $m \times n$ (leia: m por n) a uma tabela constituída por mn elementos, dispostos em m linhas (horizontais) e n colunas (verticais)”. (p. 342)

Ainda no primeiro tópico, são apresentadas as definições de alguns casos particulares de matrizes $m \times n$: matriz linha (quando m = 1), matriz coluna (quando n = 1) e matriz quadrada (quando m = n).

Após apresentar alguns exemplos de matrizes com elementos numéricos, os autores apresentam uma matriz $m \times n$ com elementos genéricos e a representa utilizando uma notação mais sintética: $A = (a_{ij})$, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

São definidos, também, elementos da diagonal principal e matriz diagonal, sendo, então, o tópico finalizado com quatro exercícios onde o 1º e 3º são resolvidos e a resolução do 2º e 4º são semelhantes às dos exercícios anteriores.

Duas matrizes A e B são iguais, A = B, quando $a_{ij} = b_{ij}$, ou seja, "(...) duas matrizes $m \times n$ são iguais se possuem os elementos de mesma posição iguais" (p.345).

Em seguida, são apresentados os conceitos de adição de matrizes, matriz nula, matrizes oposta, as propriedades da adição de matrizes, subtração de matrizes, multiplicação de um número real por uma matriz e suas propriedades[10], sendo, então, propostos 10 exercícios sobre soma, subtração e igualdade de matrizes e dois exercícios sobre multiplicação de um número por uma matriz, sendo um deles resolvido.

No décimo primeiro tópico os autores apresentam, a partir da soma dos 10 primeiros termos de uma progressão, o conceito de somatórias:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i$$

Em seguida são propostos 12 exercícios sobre o tema, sendo cinco deles resolvidos.

Seguindo o estudo de somatórias temos as demonstrações das seguintes propriedades:

1. $\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_1$

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

3. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j$

[10] Não nos atentaremos à apresentação desses conceitos, pois a abordagem realizada é semelhante à maioria dos manuais que já analisamos.

4. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$

Utilizando o conceito das somatórias, no tópico seguinte, os autores definem multiplicação de matrizes: C é o produto de A por B, indica-se AB, se $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

A título de observação os autores destacam que o produto AB de duas matrizes só é definido quando o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Após apresentar dois exemplos numéricos de produto são propostos quatro exercícios sobre o tema e apresentado seis exercícios resolvidos, sendo que a partir deles algumas características do produto entre matrizes são apresentadas.

Matriz Unidade é a "(...) matriz quadrada $I_n = (\delta_{ij}), com\, 1 \le i \le n \; e \; 1 \le j \le n$ onde $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 \; quando \; i = j \\ \delta_{ij} = 0 \; quando \; i \ne j \end{cases}$ " (p. 360).

Dando continuidade ao estudo são apresentadas e demonstradas as propriedades da multiplicação de matrizes. Vale ressaltar, que todas as demonstrações são feitas com o símbolo de somatória. Ao final deste tópico são apresentados seis exercícios numéricos de multiplicação entre matrizes.

Em seguida temos a definição, as propriedades e dois exercícios de matriz transposta, sendo a transposta da matriz A indicada por A_t .

Retornando o estudo de determinantes, iniciado no 2º volume da obra, é apresentada no 17º tópico a definição de matriz reduzida, determinante de uma matriz de ordem um e cofator do elemento a_{ij}: $co\, a_{ij} = (-1)^{i+j} . \det A_{ij}$.

Após apresentar três exemplos onde são calculados os cofatores dos elementos de três matrizes os autores apresentam o teorema de Laplace:

O determinante é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos cofatores. (p. 368)

A partir de um exemplo os autores afirmam, conforme o teorema de Cauchy, que: “Em toda matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, a soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos cofatores dos elementos de outra fila paralela é igual a zero” (p. 369).

No tópico 18 temos que “se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, tem-se: $\det(AB) = \det A . \det B$” (p.372).

Em seguida temos a definição, dois exemplos, o enunciado e as demonstrações dos três teoremas abaixo sobre matriz inversa:

> Se A é uma matriz quadrada tal que $\det A = 0$, então A não é invertível.
>
> Caso exista a inversa de uma matriz A, ela é única.
>
> Se A é uma matriz quadrada tal que $\det A \neq 0$, então A é invertível e a sua matriz inversa pode ser obtida através de: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} . \overline{A_t}$ (p.374)

Onde $\overline{A_t}$ é a transposta da matriz dos cofatores de A. O tópico sobre matriz inversa é finalizado com doze exercícios sobre o tema.

No último tópico deste capítulo é apresentado o método para resolver um sistema linear normal ($\det A \neq 0$) de ordem $n \times n$. Conforme vimos no 2º volume, um sistema pode ser representado através da seguinte equação matricial: $AX = B$, como A é inversível, pois $\det A \neq 0$, então, um sistema linear normal é possível e determinado, pois a matriz X assume um único valor dado pelo produto $A^{-1}B$. Destacamos que não é proposto nenhum exercício e não é apresentado exemplos sobre esse tópico.

Vale, por fim, ressaltar que nenhum volume da obra possui prefácio ou alguma declaração feita pelos autores, entretanto, devido à seqüência dos conteúdos, acreditamos que a obra é dividida por série do Ensino Secundário. Dessa forma, o conteúdo de Matrizes, abordado no final do 3º volume, é indicado para final do 3º ano do Ensino Secundário, fator que diferencia esse manual dos demais que analisamos, onde o estudo de matrizes, normalmente, é feito juntamente com o estudo de Sistemas Lineares, sendo estes tópicos indicados para o 2º ano. Acreditamos que tal separação e que o fato do estudo sobre matrizes ser realizado no 3º volume, se deve à abordagem lógico-dedutiva utilizada pelos autores para apresentar este conteúdo.

Conforme podemos perceber nas apresentações de métodos para memorizar as fórmulas que são utilizadas para resolver sistemas lineares, os autores buscam que os alunos decorem os processos de resoluções de sistemas lineares.

Podemos perceber que o conteúdo de determinantes é abordado de forma concisa, apenas para auxiliar na resolução de sistemas lineares. Apesar das suas propriedades não serem apresentadas explicitamente, em um tópico específico, algumas delas são destacas nas resoluções de exercícios.

Livro: Matemática

Autor: Fernando Trotta

Edição: não consta

Ano de publicação: 1988

Editora: Scipione

Nível de Ensino: 2º grau

A coleção Matemática escrita pelo professor Fernando Trotta, publicada em 1988, foi dividida em nove volumes. Em cada volume o autor aborda assuntos básicos da matemática escolar, estudados no decorrer dos três anos do 2º grau.

Segundo o autor, a divisão de uma coleção de livros didáticos por conteúdo oferece ao professor maior autonomia para desenvolver suas atividades e compor um currículo que atenda suas perspectivas e que supra as necessidades de seus alunos.

Além disso, Trotta defende que com esse tipo de publicação torna-se possível aprofundar o estudo sobre o conteúdo, apresentando textos complementares, uma quantidade maior de exercícios e informações históricas que, dependendo do tempo e do objetivo a ser alcançado pelo professor, possibilitam um aprofundamento do tema, sem que seja necessário recorrer a outros manuais didáticos.

O quinto volume da coleção, o qual iremos analisar, aborda os conteúdos de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes. O manual é dividido em quatro capítulos, que tratam dos temas citados, respectivamente, sendo o quarto capítulo dedicado a um Aprofundamento sobre Sistemas Lineares.

Trotta inicia o primeiro capítulo com um estudo sobre Equações Lineares para, em seguida, introduzir o conceito de Sistemas Lineares e, utilizando o método de escalonamento, obter seu conjunto solução e classificá-lo como Sistema Possível Determinado ou Indeterminado ou Sistema Impossível.

O segundo capítulo[11] é dedicado ao estudo de Matrizes, sendo este dividido em três tópicos: Introdução, Matrizes e Complementos sobre Matrizes. O segundo tópico, "Matrizes", é dividido de acordo com os temas: Conceito de Matriz; Matrizes Especiais; Adição e subtração de matrizes; Definição de matriz oposta; Propriedades da adição de matrizes; Multiplicação de uma matriz por um número real; Somatórias; Multiplicação de matrizes; Propriedades da multiplicação de matrizes; Observações importantes sobre a multiplicação de matrizes; Matriz Transposta; Matriz Inversa; Matrizes simétricas e anti-simétricas.

Na introdução são apresentados problemas práticos, como tabelas com preços de produtos utilizados por uma fábrica de chocolate. Ao mostrar que essas tabelas caracterizam um sistema linear, o autor destaca que os coeficientes de um sistema linear são o que realmente importa para resolvê-lo.

Neste momento introdutório o autor afirmar que as tabelas que representam um sistema são denominadas Matrizes. É importante saber operar com as linhas e colunas dessas matrizes, pois, segundo o autor, esse é o processo que acontece no "cérebro" de um computador.

O segundo tópico, Matrizes, é iniciado com a seguinte definição de matriz: "Consideremos dois números inteiros positivos, m e n. Chama-se matriz mxn (lê-se matriz m por n) a tabela formada por $m.n$ números reais dispostos em m linhas (horizontais) e n colunas (verticais)." (p.25)

Em seguida, são apresentadas as possíveis notações de uma matriz (entre colchetes, parênteses ou duas barras) e a notação utilizada para apresentar seus elementos a_{ij}, onde *i* indica a linha e *j* indica a coluna à qual o elemento pertence.

Pode-se, de maneira mais sintética, representar uma matriz A, por: $A = (a_{ij})mxn, com\, 1 \leq i \leq m \;\; 1 \leq j \leq n$, onde mxn indica o tipo da matriz e a_{ij} o elemento da matriz.

Conforme o valor de m, de n e dos elementos de uma matriz, o autor define as seguintes matrizes especiais: matriz linha, matriz coluna, matriz quadrada - nesta última temos a definição de diagonal principal e secundária, que são representadas por DP e DS, respectivamente - matriz diagonal, matriz identidade, matriz triangular e matriz

[11] Daremos ênfase a esse capítulo, por se tratar do nosso tema de estudo.

nula. Após definir e apresentar exemplos dessas matrizes são resolvidos três e propostos cinco exercícios sobre os temas estudados.

Após definir igualdade entre duas matrizes ("Duas matrizes mxn são iguais se seus elementos de mesma posição são iguais." (p. 31)), e propor quatro exercícios sobre esse tema, o autor define adição e subtração de matrizes, "(...) para somar duas matrizes, somamos seus elementos de mesma posição." (p.33) e a subtração de duas matrizes, A e B, é dada pela "soma de A com a matriz oposta de B" (p.35), onde a oposta de B, representada por –B, é a matriz que se obtém trocando o sinal de cada elemento de B.

A adição de matrizes, assim como a adição de números reais, possui as propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro e oposto. Dessa forma, Trotta observa que quando temos uma equação em que as parcelas são matrizes "(...) podemos passar uma matriz para o outro lado da equação, trocando seu sinal." (p.35). A partir dessa informação são resolvidos três e propostos cinco exercícios sobre adição e subtração de matrizes.

No tópico seguinte, o autor deduz o procedimento para multiplicar uma matriz por um número real a partir da simplificação de uma equação linear. Por exemplo, a equação $-9x+6y+3z=15$ pode ser simplificada. Se multiplicarmos os dois lados da igualdade por $\frac{1}{3}$, obtemos: $-3x+2y+x=5$. Dessa forma, representando essa equação na forma de matrizes, obtemos: $\begin{bmatrix}-9 & 6 & 3\end{bmatrix} e \begin{bmatrix}15\end{bmatrix}$ e multiplicando por $\frac{1}{3}$, obtemos: $\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\end{bmatrix} e \begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$.

Assim, o autor conclui que "(...) o produto de uma matriz mxn por um número real é uma matriz obtida a partir da matriz dada por meio da multiplicação de cada um de seus elementos pelo numero real" (p.39). Em seguida, são apresentadas as propriedades e propostos três exercícios sobre essa operação.

Antes de apresentar a definição de multiplicação entre matrizes, o autor, a partir da soma de 12 parcelas, introduz o conceito de somatórias e, em seguida resolve seis e propõe 12 exercícios sobre este conteúdo.

Ao apresentar uma situação enfrentada por uma fábrica de chocolate, em que o custo de ingredientes que compõem três tipos de bombons variam nos meses de janeiro, fevereiro e março e, a partir da pergunta "Quais são os custos de produção de 10kg de cada tipo de bombom ao longo desses três meses?", o autor introduz o conceito de Multiplicação de Matrizes.

Num segundo exemplo, o autor representa um sistema linear na forma de multiplicação e igualdade de matrizes. Em seguida, afirma que o elemento c_{ij}, da matriz C, onde $C = A.B$, "(...) é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B e somando-se esses produtos" (p.49). Após observar que a multiplicação entre duas matrizes só é definida quando o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, o autor apresenta dois exemplos e propõe nove exercícios sobre esse tópico.

Em seguida, são apresentadas as propriedades da multiplicação de matrizes (Cujas demonstrações encontradas no tópico de Complementos de Matrizes) 23 exercícios e três observações importantes sobre matrizes: A multiplicação de matrizes não é comutativa; Na multiplicação de matrizes, não vale a lei do anulamento do produto; Na multiplicação de matrizes, não vale a lei do cancelamento do produto. São, então, propostos quatro exercícios nos quais os alunos devem utilizar essas novas informações.

Matriz transposta é representada por A_t e "(...) é obtida de A trocando-se ordenadamente suas linhas por suas colunas" (p. 65). Após apresentar algumas observações, propriedades e exemplos sobre matriz transposta, o autor propõe três exercícios sobre este conteúdo.

Dando continuidade ao estudo sobre Matrizes, no tópico seguinte é apresentado o conceito de Matriz Inversa. Inicialmente, o autor apresenta um sistema linear e o seu conjunto solução.

Dado o sistema linear $\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = -1 \\ -3x - 14y + 19z = 63 \end{cases}$, representado na forma matricial por $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -14 & 19 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 63 \end{bmatrix}$, Trotta representa o conjunto solução desse sistema por: $\begin{cases} x + 0y + 0z = -2 \\ 0x + y + 0x = 0 \\ 0x + 0y + z = 3 \end{cases}$, ou $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. São utilizadas algumas operações para transformar a matriz dos coeficientes do sistema na matriz identidade, esse processo é resumido "(...) na multiplicação de A por outra matriz, que chamaremos de inversa de A e indicaremos por A^{-1}, tal que: $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$". (p.69). Após apresentar dois exemplos e dois exercícios resolvidos, o autor propõe quatro exercícios sobre matrizes inversas.

Em seguida, é definida matriz simétrica e anti-simétrica, $A_t = A \; e \; A_t = -A$, respectivamente sendo propostos quatro exercícios sobre esse tópico.

O capítulo sobre Matrizes é, então, finalizado com um "Complemento sobre Matrizes", onde Trotta apresenta e demonstra as propriedades das somatórias e demonstra as propriedades de multiplicação de matrizes e de matrizes transpostas.

No terceiro capítulo, dedicado ao estudo dos determinantes, são apresentadas suas propriedades e os procedimentos utilizados para calculá-los. Além disso, é destacada a aplicabilidade que este conteúdo tem na resolução de Sistemas Lineares.

Vale ressaltar que no tópico "Complementos sobre Determinantes" é deduzida a fórmula que permite efetuar o cálculo da inversa de uma matriz a partir do seu determinante. Além disso, é apresentada a definição e exercícios sobre a Matriz de Vandermonde.

No último capítulo é retomado o estudo dos sistemas lineares, sendo que neste o autor utiliza o determinante das matrizes do sistema para encontrar e discutir as possíveis soluções de um sistema linear.

O livro é finalizado com um resumo de cada capítulo, onde são apresentadas as definições e propriedades estudadas no decorrer do manual, seguidos por testes de vestibulares organizados segundo os temas abordados e outra série de testes e exercícios discursivos de vestibulares que não obedecem à divisão por assuntos.

Para nossa pesquisa, vale ressaltar a preocupação do autor com a aprendizagem dos alunos, buscando relacionar o conteúdo com situações do dia-a-dia e apresentando fatos históricos que, conforme Trotta, "(...) não são meras curiosidades, mas relacionam-se efetivamente com os conceitos envolvidos. Compreender esta evolução histórica é fundamental para uma aprendizagem significativa, abrindo caminho para a autonomia intelectual". (p.3).

Além disso, destacamos que o autor facilita a compreensão dos conceitos estudados, apresentando as definições em linguagem matemática e, em seguida, em linguagem natural.

A quantidade de exercícios e testes propostos facilita a fixação do conteúdo e, segundo o autor, “(...) não só visam à prática de certas habilidades específicas, mas também envolvem o desafio de situações novas.” (p.3)

Destacamos, ainda, que o autor trabalha os conteúdos de matrizes e determinantes a partir do conceito de sistemas lineares e de sua representação na forma de matrizes, o que nos faz acreditar que esses conteúdos são apresentados com o objetivo de aplicá-los à resolução de sistemas lineares.

Livro: Matemática

Autor: Edwaldo Bianchini; Herval Paccola.

Edição: 1ª Edição

Ano de publicação: 1991

Editora: Editora Moderna

Nível de Ensino: 2º Grau.

A obra Matemática, escrita pelos professores Edwaldo Bianchini e Herval Paccola, teve sua 1º edição publicada no ano de 1991.

Segundo os autores, o principal objetivo dessa obra é facilitar o aprendizado. Para atingir esse objetivo, os autores afirmam, no prefácio do manual, que “a obra é suficientemente completa, de forma que, ao final do curso, o aluno tenha condições de prestar os exames vestibulares e prosseguir seus estudos em outros níveis”. Ainda no prefácio, os autores justificam a quantidade de exercícios propostos afirmando que “(...) poucos alunos conseguem aprender apenas vendo o professor fazer, pois é fazendo que se aprende”.

O manual, dividido em 15 capítulos, aborda os seguintes temas: Progressões Aritméticas; Progressões Geométricas; Matrizes; Determinantes; Equações Lineares; Binômio de Newton; Análise Combinatória; Probabilidade; Geometria no Espaço; Poliedros; Prismas; Pirâmides; Cilindro; Cone; e Esfera.

O terceiro capítulo, dedicado ao estudo de Matrizes, é dividido em 10 tópicos, intitulados: Noção de Matriz; Representação genérica de uma matriz; Tipos de matrizes; Igualdade de matrizes; Adição de matrizes; Subtração de Matrizes; Multiplicação de um número real por uma matriz; Multiplicação de matrizes; Matriz transposta; e Matriz Inversível.

No primeiro tópico o autor apresenta a noção de matrizes através de uma tabela que contém o número de livros didáticos vendidos por algumas livrarias. “Chama-se matriz do tipo mxn a toda tabela de elementos dispostos em m linhas e n colunas”. (p.37)

A partir dessa definição os autores apresentam a noção de ordem e as notações utilizadas para representar uma matriz: entre colchetes, entre parênteses ou entre duas barras verticais. Em seguida, os autores definem e apresentam exemplos de matriz linha, coluna e nula.

Após propor cinco exercícios sobre o tipo e número de elementos de uma matriz, os autores representam uma matriz na forma genérica e propõem três exercícios sobre esse tópico.

No tópico seguinte, Tipos de Matrizes, são apresentadas as definições e alguns exercícios de matriz quadrada, matriz diagonal, matriz identidade e matriz triangular.

A partir do conceito de elementos correspondentes, “(...) elementos com o mesmo índice (...)” (p.43), são definidas igualdade - “(...) duas matrizes do mesmo tipo são iguais se e somente se os elementos correspondentes de ambas forem iguais” (p.43), e adição entre duas matrizes de mesma ordem - chama-se soma de duas matrizes A e B a matriz “(...) que se obtém somando-se os elementos correspondentes de A e B”. (p.44).

Após definir matriz oposta, apresentar um exemplo e as propriedades de adição entre matrizes, os autores definem subtração de matrizes e resolvem três exemplos sobre esse tema.

Prosseguindo o estudo, os autores definem o produto de uma matriz por um número real: “Dada a matriz A, do tipo mxn, e um número real k, chama-se produto de k por A, indicado $k.A$, a matriz que se obtém multiplicando todo elemento de A por k.” (p.48)

Em seguida, os autores relacionam a multiplicação entre duas matrizes com uma situação enfrentada por uma empresa que fabrica dois modelos de um equipamento e que precisa saber a quantidade de material a ser utilizado, para cada modelo, para atender aos pedidos referentes aos meses de janeiro e fevereiro. São apresentadas duas propriedades da multiplicação de matrizes: Associativa e Distributiva.

No nono tópico temos a definição e dois exemplos de matriz transposta: “Chama-se transposta de uma matriz A, do tipo mxn, a matriz do tipo nxm cujas linhas coincidem ordenadamente com as colunas da matriz A. Indica-se a matriz transposta de A por A^t" (p.55).

Finalizando o estudo de matrizes, os autores apresentam o conceito de matrizes inversíveis. Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se existir B de mesma ordem, tal que $AB = BA = In$. São, então, apresentados dois exemplos referentes a esse tópico.

O capítulo é finalizado com uma lista com 17 exercícios complementares sobre os tópicos abordados e 19 testes de vestibulares sobre o conteúdo de "Matrizes".

Para nossa pesquisa, vale ressaltar, a preocupação didática dos autores, que apresentam vários exemplos e propõem diversos exercícios sobre os tópicos estudados. Além disso, os autores contextualizam o conteúdo o que, a nosso ver, facilita a compreensão e assimilação do conteúdo pelos alunos.

Os exercícios apresentados ao término de cada tópico e as listas de exercícios complementares e testes de vestibulares, auxiliam na fixação da aprendizagem.

Ressaltamos também a orientação tecnicista da obra assumida em seu prefácio e observada pela quantidade elevada de exercícios propostos.

Livro: Fundamentos da Matemática Elementar

Autor: Gelson Iezzi e Samuel Hazzan

Edição: 7ª Edição

Ano de publicação: 2001

Editora: Saraiva

Nível de Ensino: Ensino Médio

A obra que iremos analisar faz parte da coleção "Fundamentos da Matemática Elementar" publicada por Gelson Iezzi e Samuel Hazzan, que dividem os exemplares da coleção por conteúdos matemáticos. No quarto volume da coleção é apresentado um estudo sobre Seqüências (Progressão Aritmética – PA e Progressão Geométrica – PG), Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares.

O capítulo IV da obra é dedicado ao estudo sobre matrizes que é dividido em oito tópicos intitulados, respectivamente, Noção de Matriz, Matrizes Especiais, Igualdade, Adição, Produto de número por matriz, Produto de Matrizes, Matriz Transposta e Matrizes Inversíveis. Além desses conteúdos, no final do capítulo é apresentado o texto “Cayley e a teoria das matrizes”, onde os autores apresentam alguns acontecimentos históricos e as contribuições de Cayley que resultaram no desenvolvimento da teoria das matrizes.

No primeiro tópico do capítulo analisado, os autores definem e apresentam exemplos de matrizes. Segundo Iezzi e Hazzan “Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se mxn) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.” (p. 44)

Em seguida, são apresentadas as definições de algumas matrizes especiais: matriz linha, coluna, nula, quadrada, diagonal e unidade, e propostos, no final do segundo tópico, quatro exercícios, um deles é seguido por sua solução.

No terceiro tópico os autores definem igualdade entre matrizes, apresentam a solução de um exercício e propõem um exercício semelhante ao apresentado.

Dando continuidade ao estudo, no quarto tópico, é apresentada a definição de adição de duas matrizes e algumas propriedades dessa operação: Associativa, Comutativa, Elemento Neutro e Elemento Simétrico, seguidas por suas respectivas demonstrações. Para finalizar esse tópico são propostos nove exercícios sobre adição de matrizes.

Assim como já indica o título, no quinto tópico, é realizado um estudo sobre produto de um número por matriz que segue o mesmo esquema dos tópicos anteriores apresentando a definição, exemplos, propriedades e sete exercícios sobre essa operação.

No tópico sobre Produto entre duas Matrizes os autores definem essa operação da seguinte maneira:

> Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jk})_{mxp}$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{mxp}$ tal que
>
> $c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + ... + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ para todo $i \in \{1,2,..., m\}$ e todo $k \in \{1,2,..., p\}$ (p.55)

Após essa definição são apresentadas algumas observações sobre essa operação, dentre elas, a condição de existência do produto AB, ou seja, só é possível efetuar o produto da matriz A pela matriz B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Além disso, é apresentado um esquema para efetuar o produto entre matrizes: primeiro coloca-se a linha da matriz A na vertical ao lado da coluna de B, calcula-se os produtos dos elementos que ficaram lado a lado e somam-se esses produtos, obtendo os elementos da matriz C. Tais observações são seguidas por dois exemplos e onze exercícios, sendo três deles seguidos por suas soluções. Nesse tópico são apresentadas, ainda, as propriedades do produto de matrizes, seguidas por suas demonstrações, sendo finalizado com dez exercícios.

Matriz Transposta é o tema de estudo do sétimo tópico, onde é apresentada a definição, exemplos e propriedades desse conteúdo. Ainda nesse tópico é apresentada a definição de matriz simétrica e anti-simétrica, seguidas por cinco exercícios.

O último tópico desse capítulo é dedicado ao estudo de matrizes inversíveis, conforme Iezzi e Hazzan "(...) dizemos que A é matriz inversível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular". (p.69) Após essa definição os autores apresentam cinco exemplos numéricos e propõem 17 exercícios sobre matrizes inversíveis.

O capítulo sobre determinantes é iniciado com uma breve explanação histórica sobre o conteúdo, segundo os autores

> A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares de equações. Hoje em dia, embora não sejam um instrumento prático para resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, para sintetizar certas expressões matemáticas complicadas. (p. 79)

Após esse texto os autores iniciam o estudo sobre determinantes, o qual é realizado de forma semelhante aos demais livros que já descrevemos.

Sobre o estudo dos determinantes os autores ressaltam, na apresentação da obra, que "(...) deve ser feito sem exageros, com ênfase em cálculo numérico e propriedades operatórias".

Para nossa pesquisa, vale ressaltar, a preocupação didática dos autores ao apresentar os conteúdos, durante o desenvolvimento da obra, além dos exemplos, são apresentados vários exercícios resolvidos, onde os autores apresentam novos conceitos que podem ser auxiliar os estudantes a resolver os exercícios propostos.

Vale ressaltar, ainda, a observação de que, embora os determinantes tenham sua origem atrelada a métodos para resolução de sistemas lineares, os autores considerem que eles não fornecem um método prático para esse objetivo, sendo mais aplicados, hoje, para simplificar expressões matemáticas, o que implica na defesa de que não se dê demasiada ênfase ao estudo dos determinantes, devendo se restringir aos cálculos numéricos. Certamente, esta visão sobre os determinantes e sua relação aos sistemas lineares deve ser entendida no contexto da obra, que se destina a cursos de ensino médio. Assim, ela nos revela a visão dos autores sobre o grau de profundidade com que os sistemas lineares devem ser estudados, limitando-se a sistemas de baixo grau de complexidade, para os quais o estudo de determinantes não tenha grande utilidade.

TABELA DE RESUMO DAS OBRAS

Livros	Ano Publicação	Nível de Ensino	Permutações	Determinantes	Matrizes	Sistemas Lineares	História	Qtde de Exercícios	Observações
1 – Cours D' Algèbre Superieure – Comberousse	1887	Ensino Superior	X	X		X		17	O autor define “Determinantes” a partir do conceito de permutação.
2 – Álgebra Elementar-Serrasqueiro	1906, 1929 e 1936	2º ano do Ens. Secundário	X	X		X		40	Não utiliza o conceito nem a representação de matrizes O tópico de determinantes é abordado no quinto e último “livro” do manual. Apresenta o conteúdo de determinantes com o objetivo de aplicá-lo à resolução de sistemas de equações lineares. O conteúdo de “Determinantes” é abordado somente em seus aspectos elementares São 33 exercícios sobre determinantes e 7 sobre sistemas lineares

3 – Exercícios de Álgebra – Cecil Thiré	1927	Ensino Secundário	X	X				30	Os exercícios sobre determinantes são os últimos a serem abordados Não há nenhum exercício sobre sistemas lineares Há exercícios sobre permutação, o que indica que esse conteúdo era ensinado juntamente com o tópico de determinantes.
4 – Álgebra Elementar: Equações e problemas algébricos - Maeder	1928	Ginásio		X		X	X	0	Aborda superficialmente o conteúdo de Determinantes, utilizando apenas quatro páginas, o que nos indica que o autor só aborda o tema com o objetivo de utilizá-lo para solucionar sistemas de equações do 1º grau. Apesar de não usar o termo, o autor utiliza o conceito de permutação para definir determinantes. Simboliza um determinante pela letra Δ Não apresenta as propriedades dos determinantes. Não propõe nenhum exercício. Não demonstra nenhuma fórmula.

5 – Análise Algébrica - Serrão	1945	Curso Científico, Escolas Militares, Candidatos ao Vestibular.	X	X	X*	X	X	40	O conteúdo de determinantes é o terceiro tópico abordado no livro. Apresenta uma breve história sobre os determinantes O conteúdo Determinante é introduzido por sua aplicação na verificação da existência de uma solução para um sistema de equações O autor apresenta o produto de determinantes e apresenta alguns determinantes notáveis. São propostos 40 exercícios sobre o tópico de determinantes, sendo alguns de aplicações e outros de demonstração, os exercícios de aplicação são seguidos pelas suas respostas.
6 – Lições de Álgebra e Análise Caraça	1945 e 1959	Ensino Superior	X	X	X	X	X	8	O tópico de determinantes esta na parte intitulado “Algoritmos de Simetria” Primeiro livro analisado em nossa pesquisa que aborda a teoria das matrizes. Abordagem dos determinantes precede à teoria das matrizes

									O autor define determinante a partir do conceito de permutação e utiliza para desenvolver um determinante de terceira ordem a regra do octógono estrelado. A definição de matrizes apresentada pelo autor é a mesma apresentada nos livros anteriores que não abordam a teoria das matrizes. O autor dá destaque a Matrizes e Determinantes ao concluir sua obra com um estudo sobre casos especiais destes conteúdos. O autor trata da possibilidade dos elementos das matrizes serem números complexos. O autor utiliza o conceito de conjunto, anel, corpo, tópicos estudados nos capítulos anteriores. Todos os capítulos são finalizados com alguns exercícios.

7 – Curso de Matemática Maeder	1947	Colegial	X	X	X*	X		20	Aborda os conteúdos previstos pelo programa oficial, conforme a Reforma Capanema de 1942. O autor utiliza o conceito de permutação, apresentada no início do capítulo, para definir determinante de uma matriz quadrada. Apesar de não apresentar a Álgebra das Matrizes o autor define produto entre duas matrizes, para em seguida definir o produto entre dois determinantes.
8 – Álgebra: Dumont	1947	Curso Superior	X	X		X		75	Define determinantes a partir do conceito de permutação Segundo Dumont, “a teoria de determinantes fornece um meio simples e elegante de discutir e resolver um sistema”. (p. 387).
9 – Curso de Matemática Maeder	1958	2ª série – Ciclo Colegial	X	X	X*	X	X	20	O autor apresentar um pequeno texto sobre a história da teoria dos determinantes. Em seguida o autor define matrizes, entretanto, não apresenta sua teoria.

									Vale ressaltar que o autor utiliza o conceito de matriz para definir determinantes e produto de dois determinantes.
10 – Matemática Quintella	1959	Segundo Ano Colegial	X	X		X		30	Neste manual são tratados apenas os conteúdos sobre Determinantes que facilitam o seu cálculo e, conseqüentemente, que auxiliam na resolução de sistemas lineares.
11 – Curso de Matemática Bezerra	1960 e 1976.	Segundo grau		X	X*	X	X	34	O autor inicia estudo dos determinantes apresentando um pequeno texto sobre sua origem.

12 – O Cálculo de Matrizes – Harry Farrer	1960	Ensino Superior		X	X	X		10	Trata-se de uma obra que o autor classifica como notas de aulas. Nos três primeiros capítulos o autor utiliza uma “linguagem natural” enquanto no quarto capítulo prevalece uma “linguagem matemática”. O tema determinante é abordado numa única página da obra, sendo apresentada apenas a sua definição. A obra é toda dedicada, então, ao estudo de Matrizes. O tema de sistemas lineares é tratado como possibilidade de aplicações de matrizes.
13 – Matemática Irmãos Maristas	1965	Colegial: Parte do Mestre	X	X	X*	X	X	60	O autor demonstra preocupação com a sala de aula, apresentando sugestões de abordagens. Esse é o primeiro livro a apresentar uma definição para o determinante de uma matriz de primeira ordem. Nesse manual é apresentado um estudo detalhado sobre determinantes.

14 – Álgebra Linear – Monteiro	1965	Superior			X	X		27	Dá um tratamento mais “sofisticado” à teoria das matrizes. O conteúdo ensinado não é elementar, são utilizados vários recursos da álgebra linear e da teoria dos conjuntos.
15 – Matemática –SMSG	1966	3º ano do Curso Colegial		X	X	X		115 (nos dois primeiros capítulos que foram descritos)	Os autores ressaltam a importância do estudo de matrizes, destacando sua aplicação em diversos ramos da ciência e da engenharia e apresentam alguns exemplos de uso no cotidiano. Os autores demonstram uma preocupação com a aprendizagem dos alunos, relacionando o conteúdo que esta sendo aprendido (álgebra das matrizes) com um conteúdo que eles já conhecem (álgebra comum). É dada ênfase às estruturas algébricas como conjunto, corpo e anel. Apresenta determinante como uma função.

16 – Biblioteca Moderna de Matemática	1968[12]	Ciclo Colegial e Admissão às Escolas Superiores	X	X	X*			37	Apesar de ser uma obra posterior ao MMM, a obra possui características dos livros anteriores ao movimento, dentre elas a ênfase no estudo de determinantes, a apresentação do conceito de determinantes a partir de permutação e a definição dada à uma matriz.
17 – Curso Colegial Moderno: Matematica Scipione	1968	2ª Serie Colegial		X	X	X		28	Os autores apresentam os tópicos sobre Determinantes e Matrizes Inversas no capítulo de Sistemas Lineares, sendo que, geralmente, esses conteúdos são apresentados no capítulo sobre Matrizes. É feita uma abordagem aos Sistemas não Lineares, conteúdo pouco abordado em livros publicados para o ensino secundário. Os autores utilizam noções de intersecção entre conjuntos para apresentar conclusões sobre o número de soluções que um sistema pode assumir

[12] No livro que analisamos não tem data de publicação, porém através de pesquisa na internet, encontramos que os livros da coleção Biblioteca Moderna de Matemática foram publicados a partir de 1968, por isso tomamos esse ano como ano de publicação da obra.

18 – Moderno Curso de Matemática – Bezerra	1968	1º ano cursos clássicos e científicos			X	X		29	Neste manual os tópicos de matrizes e sistemas lineares são abordados no volume dedicado ao 1º ano dos cursos clássicos e científicos. Em nenhum momento o autor menciona o conceito de determinantes O autor usa o conceito de função, conjunto, grupo e anel para definir matrizes e apresentar suas propriedades.
19 – Introdução a Álgebra das Matrizes – SMSG –	1969	Ensino Secundário		X	X	X		115	Igual ao do livro Matemática do SMSG publicado em 1966.
20 - Abecedário de Álgebra Menezes	1971	Ciclo Colegial	X	X	X*	X		20	Apesar obra ser publicada em 1971, não percebemos interferência das idéias defendidas pelo Movimento da Matemática Moderna na abordagem do conteúdo, nem na apresentação do mesmo.
21 - Matemática Aplicada: Trotta, Imenes e Jakubovic	1979 e 1980	Segundo grau		X	X	X		-	Os autores dividem os conteúdos sistemas lineares, determinantes e matrizes, abordando os dois primeiros no 2º volume da obra e

									o de matrizes no 3º volume. O conteúdo de determinantes é abordado de forma concisa, apenas para auxiliar na resolução de sistemas lineares.
22 – Matemática – Trotta	1988	2º ano do Ensino Secundário		X	X	X	X		Trotta divide seus livros por assuntos da matemática escolar. O autor trabalha os conteúdos de matrizes e determinantes a partir do conceito de sistemas lineares e de sua representação na forma de matrizes, o que nos faz acreditar que esses conteúdos são apresentados com o objetivo de aplicá-los à resolução de sistemas lineares.
23 – Matemática - Bianchini e Paccola	1991	2º Grau.		X	X	X		109	Os autores demonstram preocupação didática, apresentando vários exemplos, exercícios e contextualizando os conteúdos estudados.
24 – Fundamentos da Matemática Elementar – Iezzi e Hazzan	2001	Ensino Médio		X	X	X	X	66	

* – livros que utilizam o termo matriz, entretanto não fazem um estudo aprofundado sobre este tópico.

UMA HISTÓRIA DO ENSINO DE MATRIZES

1. *Movimento da Matemática Moderna*

Os primeiros anos da década de 1950 foram marcados por iniciativas de reformas em vários países que buscavam a melhoria do ensino de matemática, pois consideravam que a matemática ensinada não atendia às exigências impostas pelo contexto sócio-político-econômico da época.

Em 1957, com o lançamento do primeiro satélite artificial da Terra, o Sputnik I, na Rússia, os Estados Unidos se convenceram das suas desvantagens tecnológicas perante a U.R.S.S. Ao buscar explicações para tal atraso, os americanos chegaram à conclusão de que era preciso dar maior ênfase à matemática. Passaram, então, a apoiar e financiar a criação de grupos de estudos e a realização de eventos com o propósito de melhorar o ensino dessa disciplina nas escolas secundárias.

Embora haja muitos fatores que influenciam o resultado de uma atividade de ensino, os grupos envolvidos na reforma decidiram elaborar um novo currículo de matemática, com o intuito de unificar e modernizar as “Matemáticas” do currículo tradicional. Acreditavam que ao melhorar esse componente o ensino de matemática teria êxito.

A Conferência de Royamont, realizada na França, em 1959, estimulou o início de diversas atividades para a reforma do ensino e do currículo de Matemática. Dieudonné expôs nesta Conferência que deveriam constar em um currículo de Matemática o estudo de matrizes e determinantes, funções de uma variável, construções de gráficos de funções e curvas, números complexos e coordenadas polares, pois esses conteúdos não seriam tão abstratos como a geometria clássica e seriam valiosos à continuidade dos estudos matemáticos.

O maior e mais conhecido grupo de estudo sobre as propostas de modernização da matemática foi o SMSG – *School Mathematics Study Group* – fundado em março de 1958, cujas reuniões eram realizadas em Nova York. O grupo teve o propósito de contribuir para a melhora do ensino da Matemática nas escolas de nível secundário dos Estados Unidos, tornando-a mais consistente com a matemática universitária. Para atingir seu objetivo, o SMSG investiu em treinamento para os professores e na confecção de material didático de matemática (moderna) para diferentes níveis de ensino. Posteriormente, devido à repercussão internacional desse material, eles foram traduzidos para quinze idiomas, sendo, portanto, utilizado em diversos países, dentre eles o Brasil.

Após vários estudos, o SMSG chegou à conclusão de que era preciso ver a Matemática sob outro enfoque, tornando-a mais atraente e acessível aos alunos. Para atingir tal objetivo, o novo currículo enfatizava a Teoria dos Conjuntos, tópico a ser ensinado do primário à universidade, pois esse era tido como, além de um conceito básico, o unificador dos diversos ramos da Matemática Tradicional.

Nas suas publicações o SMSG apresentava, além de novos conteúdos para o ensino secundário, novas formas de organização e apresentação de toda a grade curricular, insistindo nas idéias unificadoras, defendidas pelos adeptos ao MMM, como a inclusão do estudo da Teoria dos Conjuntos, nos vários níveis de ensino. As obras publicadas pelo SMSG foram influenciadas indiretamente pelos trabalhos do grupo Bourbaki, cujas publicações tiveram um grande impacto no ensino universitário de matemática.

A ênfase dada à Teoria dos Conjuntos foi criticada por muitos professores, dentre eles o Prof. Morris Kline que, em seu livro "O Fracasso da Matemática Moderna", tece duras críticas ao movimento:

> Um exame crítico dos usos da teoria de conjuntos nos textos das escolas elementares e "high school" rejeita a afirmação dos modernistas de que a teoria de conjuntos unifica a matemática. Além de usá-la artificialmente para definir conceitos, nenhum uso significativo é feito do assunto, que é de fato posto de lado e somente o vocabulário sobrevive no desenvolvimento posterior. (Kline, 1976, p.119).
>
> A teoria de conjuntos é para a matemática elementar um formalismo oco que dificulta idéias que são muito mais facilmente compreendidas intuitivamente. A tentativa de envolvê-la é quase ridícula e uma grosseira imitação de pedagogia. A teoria de conjuntos não provou ser o elixir da pedagogia matemática. (Kline, 1976, p. 120).

Durante o processo de descrição dos manuais, notamos diversas características defendidas pelos adeptos ao movimento, tanto na abordagem, como na apresentação do conteúdo, presentes na obra "Matemática", criada pelo SMSG em 1966, para o Ensino Secundário.

No decorrer da obra, nota-se que os autores buscam contextualizar o ensino, bem como relacioná-lo com outros conteúdos já estudados pelos alunos, o que, ao nosso ver, é uma tentativa de facilitar a aprendizagem. Por exemplo, ao introduzir o estudo de adição de matrizes, os autores representam números complexos em formas de matrizes, onde a primeira linha é a parte real e a segunda a parte imaginária do número e, dessa forma, soma-se as primeiras e as segundas linhas, obtendo o número complexo resultante da soma dos outros dois.

Além disso, utilizam, para apresentar alguns tópicos sobre matrizes, os conceitos de conjunto, corpo e anel com a intenção, segundo pudemos perceber da abordagem realizada, de não apenas introduzir esses conceitos, mas fazer um estudo mais aprofundado deles, introduzindo a Teoria dos Conjuntos, como era o objetivo do movimento. Por exemplo, o capítulo "A álgebra das matrizes 2×2" é iniciado com a definição de conjunto, corpo e anel, sendo, então, concluído que o subconjunto das matrizes de ordem dois não é um corpo, pois não satisfaz a propriedade comutativa para a multiplicação. Porém, os autores demonstram que esse conjunto é um anel em relação à adição e à multiplicação. Todavia, em especial por ser um livro destinado ao ensino secundário, tais noções acabam por serem demasiadamente abstrata, não se identificando neste momento uma busca por contextualização que extrapole os domínios da própria matemática.

No início do capítulo sobre Matrizes, os autores apresentam uma breve introdução sobre o conteúdo, ressaltando, além da sua importância, sua aplicação nos diversos ramos das ciências, como engenharia e computação, o que, porém, acaba por ser meramente declaratório, pois os autores não ilustram nenhuma aplicação nessas áreas ou propõem atividades que relacionem o conceito com essas áreas.

Para definir determinantes os autores utilizam outro tópico importante da matemática, as funções, apresentando vários exercícios e exemplos para facilitar a compreensão e fixação dos conteúdos.

Percebemos que tais peculiaridades, como a introdução da Teoria dos Conjuntos e Funções no Ensino Secundário e a utilização de métodos, tais como a contextualização e relação com outros conteúdos matemáticos já estudados pelos alunos, que consideramos facilitar a aprendizagem, são freqüentes em livros posteriores à obra "Matemática", elementos que não encontramos nos livros publicados antes do movimento.

No Brasil, foram realizados cinco Congressos Nacionais do Ensino da Matemática, de 1955 a 1966, onde novas direções para o ensino da disciplina foram discutidas. O quarto congresso, que aconteceu em Belém no ano de 1962, foi o mais significativo para o MMM, pois, pela primeira vez, a questão da introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário foi, de fato, ponto de pauta. Em 1961, criou-se o GEEM (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática), presidido pelo professor Osvaldo Sangiorgi, que contribuiu para a difusão do ideário modernista no país. Em 1966, após o quinto Congresso, organizado pelo GEEM, realizado em São José do Rio Preto, foi imposto que todo o Brasil seguisse o modelo da Matemática Moderna.

Muitos acreditam que o Movimento da Matemática Moderna fracassou, pois várias das suas idéias iniciais foram deformadas ou não efetivamente colocadas em prática. Além disso, o ensino da Matemática não sofreu a transformação esperada. Os adeptos ao Movimento reconheceram que a Matemática Moderna no lugar de beneficiar o ensino trouxe-lhe novos problemas. O matemático francês G. Choquet fez, em 1973, a seguinte declaração:

> Estou estarrecido com o que constato no ensino da escola primária e da secundária. Fui um dos promotores da reforma de ensino da Matemática, mas o que eu preconizava era simplesmente uma poda de galhos mortos, atravancadores, e a introdução de um pouco de álgebra. Pois bem, em suma, os novos programas e as instruções correspondentes são mais satisfatórios que os antigos, em que pesem erros razoáveis; mas há toda uma atmosfera nociva, que tem acompanhado seu desenvolvimento. Em particular, um ataque contra a geometria e contra os recursos da intuição: foi dito aos professores que seria lastimável que eles estudassem triângulos e que a álgebra linear substituiria toda a velha geometria... o resultado é tal que, sem uma forte reação da base, eu penso que a geração atual de nossa escola receberá uma formação matemática que não a prepara nem para a pesquisa, nem para a utilização da Matemática em técnicas ou ciências experimentais. (Charlot, 1991, p.29 apud Soares, 2001, p. 112)

Apesar de não ter alcançado seus objetivos, ainda percebemos os reflexos do Movimento da Matemática Moderna nas práticas escolares de muitos professores e, além disso, diversos tópicos cuja inclusão na Matemática Escolar deve-se ao MMM permanecem até hoje no currículo das escolas secundárias, dentre os quais podemos destacar o estudo de Matrizes.

2. *Determinantes*

Em alguns manuais analisados os autores iniciam o estudo sobre determinantes ressaltando a sua importância e aplicabilidade em diversas áreas. De acordo com Bezerra (1976)

> Apesar de ter sua origem em um problema da Álgebra Elementar, do qual já tomamos conhecimento no Curso Ginasial, a teoria dos determinantes desenvolveu-se a tal ponto que constitui hoje um algoritmo de grande importância na Matemática pura e aplicada. (p. 118)

No livro publicado pelo SMSG, os autores definem determinantes a partir da inversa de uma matriz e o representa como uma função. Segundo os autores a existência do inverso da matriz $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ depende do valor da expressão $ad - bc$, sendo esta expressão representada através da função: $\delta(x) = ad - bc$, denominada função determinante da matriz X. A função determinante para matrizes de ordem maior que dois é dada por recorrência a partir da definição posta para a matriz de ordem 2.

Tal definição foi encontrada somente neste manual. Na maioria das obras analisadas a definição de determinantes se assemelha à definição apresentada no livro "Tratado de Álgebra Elementar", desenvolvido, em 1906, pelo professor José Adelino Serrasqueiro:

> Supponhamos n^2 quantidades ou elementos, dispostos em n linhas horizontaes e em n columnas verticaes:
>
> $$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & l_n \end{matrix}$$
>
> Cada letra é affectada de um indice: o indice designa a linha e a letra designa a columna a que o elemento pertence. Assim d_3 é um elemento da terceira linha e da quarta columna. Posto isto: Determinante de n^2 objectos é a somma algebrica tomados n a n, de modo que cada producto contenha mais do que um elemento de cada linha ou columna e não contenha mais do que um; e de modo que cada producto tenha o signal + ou -, conforme as permutações das letras e

> dos índices forem da mesma ou differente classe. (Serrasqueiro, 1906, p. 357).

Na obra desenvolvida por Farrer (1960), o autor apenas define um determinante como "(...) o número que se obtém desenvolvendo-se o determinante cujos elementos são idênticos aos elementos da matriz em questão" (p.11). Acreditamos que para apresentar tal definição o autor considerou que os alunos já tivessem conhecimento sobre esse conceito.

Encontramos no prefácio do livro desenvolvido, em 1965, pelos Irmãos Maristas algumas instruções metodológicas para o ensino dos conteúdos matemáticos. Ao ensino de Determinantes e Sistema Lineares o autor propõe três itens:

- Operações preparatórias: momento onde devemos tornar os elementos fracionários em elementos inteiros; verificar se o determinante é zero, segundo as propriedades anunciadas; verificar se há fila com elementos nulos, exceto um, para aplicar a definição de adjunto de um elemento.
- Processos gerais: o de Laplace, o da transformação em zeros, o de Chió, o de Houel;
- Artifícios peculiares: algumas vezes calculamos o valor de um determinante utilizando suas propriedades, entretanto, outras vezes, alguns caracteres especiais permitem obter o valor do determinante.

Além disso, os autores apresentam o programa abordado no livro e esclarecimentos quanto aos conteúdos de determinantes que deveriam ser abordados e sobre a ordem de apresentação dos mesmos;

> 1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes Menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chió.
> 2. Sistema de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer.
> 3. Sistema de m equações lineares com n incógnitas. Teorema de Rouché.
>
> **Nota**: O item 3 pertence somente ao programa do curso científico. (Irmãos Maristas, 1965, p.10)

Com base na tabela exposta anteriormente percebemos que o tópico de determinantes é apresentado na maioria dos livros analisados, tanto nos anteriores como nos posteriores ao Movimento da Matemática Moderna. Cabe ressaltar, entretanto, a diferença na abordagem do conteúdo. Nos livros anteriores ao movimento é dada maior ênfase ao estudo desse tópico, sendo apresentadas, além da definição de determinante, algumas das suas propriedades. Nestes livros os autores apresentam, inicialmente, o conceito de permutação no qual se baseiam para definir e discutir a formação de um determinante, enquanto a maioria dos livros posteriores ao movimento não apresentam essa abordagem, definindo os determinantes por recorrência e apresentando as regras para seu cálculo.

Destacamos, ainda, que em alguns livros posteriores, o estudo de Matrizes é introduzido com destaque, porém desvinculado dos determinantes. Conforme podemos perceber no livro "Moderno Curso de Matemática", onde o autor, Bezerra, apesar de realizar um estudo sobre matrizes e sistemas lineares, não apresenta o conceito de determinantes.

Conforme já destacamos na maioria das descrições, os autores de livros didáticos, em especial os posteriores ao MMM, apresentam o tópico de determinantes, aparentemente, com o objetivo de auxiliar e facilitar a resolução e discussão de Sistemas Lineares.

Em nove obras, que apresentam um estudo mais aprofundado sobre determinantes, encontramos pequenos textos, normalmente de um parágrafo e no início do capítulo sobre determinantes, no qual os autores apresentam breves informações sobre a história desse conteúdo. Dentre estas obras apenas duas, as escritas por Trotta e Iezzi e Hazzan, em 1988 e 2001, respectivamente, se enquadram no que estamos considerando como posterior ao MMM. As demais, conforme veremos na relação a seguir, em que listamos as nove obras, foram publicadas entre 1928 e 1965:

1. Álgebra Elementar: Equações e problemas algébricos (Maeder - 1928)
2. Análise Algébrica (Serrão – 1945)
3. Lições de Álgebra e Análise (Caraça – 1945)
4. Curso de Matemática (Maeder – 1947)
5. Curso de Matemática (Bezerra – 1960)
6. Matemática (Irmãos Maristas – 1965)
7. Biblioteca Moderna de Matemática (Irmãos Maristas – 1968)
8. Matemática (Trotta – 1988)

9. Fundamentos da Matemática Elementar (Iezzi e Hazzan – 2001)

Na obra ***Análise Algébrica***, publicada em 1945, o professor Serrão afirma que

> A teoria dos determinantes constitui um dos algoritmos mais importantes da Matemática, apresentando numerosas e variadas aplicações. Teve sua origem no estudo dos sistemas de equações lineares com G. W. Leibniz (1646 – 1716) e G. Cramer (1704 – 1752). (Serrão, 1945, p. 57)

Por sua vez, Bezerra (1976) afirma que

> A teoria dos determinantes teve sua origem nas pesquisas iniciadas, no fim do século XVII, por Leibnitz, na Europa, e Seki Kowa, no Japão, com a finalidade de simplificar as trabalhosas eliminações necessárias à resolução de um sistema do primeiro grau com m equações e n incógnitas. (Bezerra, 1976, p.118)

Caraça dedica um tópico do capítulo destinado ao estudo dos determinantes, intitulado "Histórica", para apresentar o seguinte texto sobre a história do conteúdo:

> A origem da teoria dos determinantes remonta ao século XVII. G. W. Leibniz (1646 – 1716) na Alemanha e Seki Shinsuke Kowa (1642-1708) no Japão, estudando, na mesma época, problemas semelhantes da teoria das equações lineares tiveram necessidade de considerar certas expressões definidas à custa dos coeficientes das incógnitas, expressões essas a que mais tarde, segundo K. F. Gauus (1777-1855), se havia de chamar determinantes.
> No século XVIII foram eles objecto de aturado estudo, sobretudo por parte de G. Cramer (1704-1752), E. Bézout (1730-1783), P. S. Laplace (1749-1827), A. T. Vandermonde (1935-1796).
> No século XIX, a sua teoria consolidou-se definitivamente, depois dos trabalhos sistemáticos de A. L. Cauchy (1789-1857) e K. G. Jacobi (1804-1851). (Caraça, 1959, p.225)

A obra "Matemática" apresenta, em ordem cronológica, os pesquisadores que desenvolveram trabalhos sobre determinantes "(...) G. Cramer (1750), Bezout (1764), Laplace (1772), Vandermonde (1772), Lagrange (1773), Cauchy (1815), Jacobi (1841), Brioschi (1854), Gunther (1877), Vronski, Cayley, Sylvester, Hermite, Clebsch, Gordon. Gauss (…)" (Irmãos Maristas, 1965, p. 269).

Além desses parágrafos, vale destacar o comentário apresentado no livro "Biblioteca Moderna de Matemática", publicado pelos Irmãos Maristas: "O estudo de algoritmos, regras práticas, para simplificar os cálculos de eliminação de um sistema de equações lineares com n incógnitas, levou à teoria dos determinantes.” (Irmãos Maristas, 1968, p. 359).

Podemos, então, de acordo com as categorias apresentadas por Vianna[13], considerar que as informações históricas apresentadas nas obras analisadas têm por finalidade informar os estudantes de como o conteúdo de determinantes se desenvolveu.

3. *Matrizes*

Ao descrever a obra “Matemática”, publicada pelo SMSG, encontramos várias características relacionadas com os propósitos do MMM. Dentre eles, o fato dos autores trabalharem de forma contextualizada com o conteúdo, apresentando diversas situações do dia-a-dia onde se pode empregar o conceito de matriz. Além disso, durante todo o capítulo estudado, os tópicos de estudo de matrizes são relacionados com outros conteúdos matemáticos, como a álgebra dos números reais, teoria dos conjuntos, números complexos e funções.

Por exemplo, para definir Adição de Matrizes, os autores utilizam como exemplo a soma de números complexos, para somar 3+5i e -2+4i, somamos suas componentes reais e suas componentes imaginárias separadamente:

$$(3+5i)=(-2+4i)=(3+(-2))+(5+4)i=1+9i$$

Tal soma pode ser representada através de matrizes, ou seja, a soma de números complexos pode ser encontrada adicionando elementos correspondentes:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Nas obras anteriores ao livro “Matemática”, os autores dos livros publicados para o ensino secundário utilizam o termo matriz apenas para indicar o quadro que contém os elementos de um determinante, não apresentando um estudo mais aprofundado sobre esse conteúdo.

De maneira geral, os autores, tanto das obras anteriores como das posteriores ao MMM, definem uma matriz como “(...) um conjunto retangular ordenado de elementos dispostos em linhas e colunas” (SMSG, 1966, p.517).

[13] Carlos Roberto Vianna realiza um estudo sobre a apropriação da História nos manuais didáticos, a partir desse estudo estabelece categorias que ilustram algumas das finalidades do uso de história nas obras, dentre elas: motivação, informação e estratégia didática.

Das obras que analisamos, a primeira que aborda a Álgebra das Matrizes[14] foi publicada em 1945 pelo professor Caraça, sendo este um manual voltado para o Ensino Superior. Além desse, as obras publicadas por Serrão (1945), Maeder (1947 e 1958), Bezerra (1960 e 1976) e Irmãos Maristas (1965), abordam a Álgebra das Matrizes antes da obra da "Matemática". Todos esses manuais são dedicados ao Ensino Superior, sendo notório que apenas nos livros posteriores ao livro publicado pelo SMSG este tópico é abordado com tal profundidade nas obras para o Ensino Secundário.

A inclusão do estudo de matrizes no ensino secundário é comentada na apresentação da obra "Matemática", desenvolvida pelos professores Barbosa, Rocha e Scipione, publicada em 1968: "O estudo das matrizes no curso secundário constitui novidade nos nossos programas, sendo, no entanto, justificável a sua introdução, em nível elementar, dadas as suas amplas aplicações, principalmente nos sistemas lineares." (Barbosa, Rocha e Scipione, 1968)

Sobre o algoritmo de matrizes Farrer (1960, p.5) destaca em seu livro que ele

> (...) já data de um século, pois foi usado pela primeira vez por Cayley, em 1857. Todavia seu emprego sistemático nos vários ramos do conhecimento humano é mais recente. Este algoritmo, flexível e compacto, encontra um campo fértil na resolução de sistemas simultâneos de equações algébricas lineares [...].

A partir da análise das obras que compõem nossa pesquisa podemos destacar que, na maioria delas, a abordagem do conteúdo Matrizes, nos livros desenvolvidos por autores brasileiros segue o mesmo modelo da obra francesa analisada, escrita por Comberousse.

A principal diferença na abordagem do conteúdo nos livros anteriores e posteriores ao movimento é a ênfase dada ao mesmo. Nos livros anteriores, o termo matriz é utilizado apenas para representar o quadro que contém os elementos de um determinante, enquanto nos livros posteriores, é realizado um estudo mais aprofundado desse conteúdo, sendo apresentada a "Álgebra das Matrizes", que, até então, era abordada apenas nos manuais dedicados ao Ensino Superior, onde os autores

[14] No livro publicado pelo SMSG, em 1966, os autores definem álgebra como "(...) um sistema que tem duas operações binárias, chamadas "adição" e "multiplicação", e também tem uma "multiplicação por um número" o que a torna ao mesmo tempo um anel e um espaço vetorial" (p.605). Entenderemos, apoiados nessa definição, "Álgebra das Matrizes" como o estudo das operações envolvendo matrizes, suas definições e propriedades.

apresentam as operações que são possíveis realizar com duas matrizes e com um número real: soma, multiplicação e multiplicação de um número por uma matriz.

Os autores dos livros posteriores ao MMM demonstram uma preocupação maior com a apresentação dos conteúdos, buscando atrair a atenção dos alunos com exemplos, exercícios e situações do dia-a-dia onde os tópicos estudados podem ser aplicados, facilitando, assim, a aprendizagem e fixação dos conteúdos. Por exemplo, na obra publicada pelo SMSG, encontramos alguns problemas sobre o tema estudado exigindo que os alunos relacionem o conteúdo com o seu dia-a-dia:

> 1. Obtenha de um jornal ou de outra fonte semelhante seis exemplos de informações apresentadas em forma de matriz.
> 2. Um vetor-linha com três elementos pode ser usado para tabelar a idade, altura e peso de uma pessoa.
>   a. Dê um vetor-linha que indique sua idade, altura e peso.
>   b. Sugira quando pode ser útil empregar um tal vetor. (SMSG, 1966, p. 519).

Na maioria dos manuais do ensino secundário o estudo dos Determinantes e/ou Matrizes é indicado para o 2º ano, sendo esses tópicos, normalmente, seguidos pelo estudo de sistemas lineares.

Dessa forma, podemos concluir que o ensino de matrizes passou a ter as características que encontramos hoje, no atual Ensino Médio, após o Movimento da Matemática Moderna, sendo identificadas poucas mudanças didáticas na sua apresentação desde então.

Acreditamos, ainda, que o conteúdo de matrizes foi incluído no Ensino Secundário pelos adeptos ao MMM, por ser um tópico de grande importância e aplicabilidade na área tecnológica, pois esta é uma das áreas que se pretendia aprimorar. Todavia, vale ressaltar que as aplicações a essas áreas não ficam claras ou não são exploradas, seja nas obras destinadas ao ensino secundário seja nas escritas para o ensino superior.

Dessa forma, podemos concluir que o ensino de matrizes inicia-se, pelo menos com maior ênfase – ou uma ênfase mais nítida –, no Ensino Secundário, em meados da década de 1960, com o Movimento da Matemática Moderna. Até então, a julgar pelos livros a que tivemos acesso, apenas o estudo de Determinantes e Sistemas Lineares eram realizados nesse nível de ensino.

Nos livros anteriores ao MMM o capítulo de determinantes é, normalmente, iniciado com o conceito de permutação, sendo esse utilizado para definir um determinante. Nessas obras, o termo matriz aparece apenas para representar o quadro que contém os elementos do determinante.

Nas obras posteriores ao movimento, publicadas após 1965, inicia-se uma nova abordagem ao estudo das matrizes. Os determinantes deixam de ser o foco do estudo e o ensino de matrizes é realizado com mais profundidade, sendo, então, apresentada a Álgebra das Matrizes no Ensino Secundário. Os determinantes passam a ser tratados, então, apenas como um acessório ao estudo de matrizes e de sistemas lineares.

Vale ressaltar, ainda, que das obras que analisamos, apenas as publicadas por Caraça, em 1945 e 1959, Monteiro, em 1965, SMSG, em 1966, e Bezerra, em 1968, definem “anel” no decorrer do estudo, sendo apenas esses dois últimos dedicados ao ensino secundário, ou seja, apenas Bezerra seguiu a estrutura apresentada pelo SMSG.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. ROCHA, L. M. PIERRONETO, S. **Curso Colegial Moderno: Matemática** – IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas - 1968

BEZERRA, M. J. **Curso de Matemática para os cursos de segundo grau**. Companhia Editora Nacional – São Paulo. 4ª Edição – 1960 e 33ª Edição - 1976.

BEZERRA, M. J. **Moderno Curso de Matemática** - Companhia Editora Nacional – São Paulo, 1968.

D'AMBROSIO, U. **Facetas do diamante** SBHMat – Rio Claro, 2000.(p.241-271).

CARAÇA, B. J. **Lições de Álgebra e Análise** – Tipografia Matemática, LDA – 2ª Edição - 1945 e 4ª Edição – 1959.

COMBEROUSSE, C. **Cours D' Algèbre Superieure** - Gauthier – Villars et Fils – 2ª edição - 1887

DUMONT, I. **Álgebra: curso Superior**. Paulo de Azevedo Ltda – 1947

FARRER, H. O Cálculo de Matrizes - Universidade de Minas Gerais – Minas Gerais. 1960.

GARNICA, A.V.M. **Resgatando Oralidades para a História da Matemática e da Educação Matemática Brasileiras: o Movimento da Matemática Moderna**. (no prelo)

JAKUBOVIC, J. IMENES, L. M. TROTTA, F. **Matemática Aplicada: Segundo grau** - Editora Moderna – São Paulo, 1979 e 1980.

JENKINS, K**. A história Repensada**. Tradução de Mário Vilela. Revisão Técnica de Margareth Rago. São Paulo. Contexto, 3ª edição. 2005.

KLINE, M. **O fracasso da Matemática Moderna**. IBRASA, 1976.

LIMA, F. R. ; PASSOS, L. F. **Osvaldo Sangiorgi Um professor moderno** Annablume, 2008. (p.95-118).

MAEDER, A. M. **Álgebra Elementar: Equações e problemas algébricos.** Typ. João Haupt & Cia. 1ª edição – 1928

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática** – Edições Melhoramentos – 1947

MAEDER, A. M. **Curso de Matemática**. Edições Melhoramentos. 8ª Edição – 1958

MARISTAS, I. **Matemática Colegial: Parte do Mestre** – FTD – São Paulo. 3ª Edição, 1965.

MENEZES, D. L. **Abecedário da Álgebra** - Livraria Nobel – 8ª Edição, 1971.

MIORIM, M. A. ; MIGUEL A. **História da Educação Matemática: Propostas e desafios**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica. 2005

MIORIM, M. A. Introdução à História da Educação Matemática – Atual, São Paulo, 1998.

MORAES, L. **Introdução à Álgebra das Matrizes,** Coleção SMSG, EDART – São Paulo, 1969.

MONTEIRO, L. H. J. **Álgebra Linear** – LPM – São Paulo. 3ª Edição, 1965

OLIVEIRA, F. D. **Análise de textos didáticos: três estudos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – Unesp, Rio Claro, 2008.

PACCOLA, H. BIANCHINI, E. **Matemática** - Editora Moderna – São Paulo. 1ª Edição, 1991.

PEREIRA, A.C.C. **Teorema de Thales: Uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista – Unesp, Rio Claro, 2005.

QUINTELLA, A. **Matemática: Segundo Ano Colegial**. Companhia Editora Nacional – São Paulo. 3º Edição – 1959

SAVIANI, D. ;ALMEIDA, J.D. ;SOUZA, R.F. ;VALDEMARIN, V.T. **O Legado Educacional do Século XX no Brasil**. Autores Associados. 2004. p 09 a 50.(Coleção Educação Contemporânea)

SCHUBRING, G. **Análise Histórica de Livros de Matemática**. Autores Associados. 2003.

SERRÃO, A. N. **Análise Algébrica**. Edição da Livraria do Globo. 2ª Edição – 1945

SERRASQUEIRO, J. A. **Álgebra Elementar**. Livraria Central de J. Diogo Pires – Sucessoras. 9ª edição (1906) 16ª Edição (1929) – 17ª edição (1936)

SILVA, C. M. S. **Facetas do diamante** – SBHMat – Rio Claro, 2000.(p.109-162).

SILVA, V. **Osvaldo Sangiorgi e "O Fracasso da Matemática Moderna" no Brasil**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica – São Paulo, 2007.

SMSG. **Matemática** - Edart – Livraria Editora Ltda. São Paulo - 1ª Edição, 1966.

SMSG. **Introdução à Álgebra das Matrizes** – Edart – Livraria Editora Ltda. São Paulo, 1969.

SILVA, V.; VALENTE, W. R. (orgs). **Osvaldo Sangiorgi Um professor moderno.** Annablume, 2008. p.145-164

SOARES, F. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?** Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

SOARES, E. T. P. **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Novos Estudos.** Redes Editora, 2008. (p.133-146)

THIENGO, E.R. **A Matemática de Ary Quintella e Osvaldo Sangiorgi: Um estudo comparativo**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, 2001.

THIRÉ, C. **Exercícios de Álgebra.** Livraria, Papelaria e Litho – Typographia. 8ª Edição 1927.

TROTTA, F. **Matemática** – Scipione – Rio de Janeiro, 1988.

VALENTE, W. R. (orgs). **– Osvaldo Sangiorgi Um professor moderno –** Annablume, 2008. (p.13–41)

VALENTE, W. R. **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Novos Estudos –** Redes Editora, 2008. (p.07-21).

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930). Annablume**, FAPESP. 2002.

VALENTE, W. R. **História da Educação Matemática: interrogações metodológicas**. REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2. 2, p.28-49, UFSC, 2007.

VIANNA, C. R.; CURY, H. N. **Ângulos; uma "História" escolar**. Revista História e Educação Matemática, v.1, n. 1, pp. 23-37, jan. / jun.2001

WIELEWSKI, G. D. **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: Novos Estudos –** Redes Editora, 2008. (p.22-34).